


B°12. 1. 180
9 A. 3. 20

80 X8
640 X2.50
12.80
32000
1600.00

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES PURES.

TOME PREMIER.



Préférez, dans l'enseignement, les méthodes générales; attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même tems qu'elles sont presque toujours les plus faciles.

LAPLACE, *Ecoles norm.*, tom. IV, p. 49.

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES PURES,

DÉDIÉ

A S. M. ALEXANDRE Ier.,

EMPEREUR DE RUSSIE;

PAR L.-B. FRANCOEUR,

Professeur de la faculté des Sciences de Paris, de l'École normale et du Lycée Charlemagne, Officier de l'Université, Examinateur des candidats de l'École impériale Polytechnique, Membre honoraire du département de la marine russe, Correspondant de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, des Académies de Rouen, Cambray, etc.

Ouvrage destiné aux élèves des Écoles Normale et Polytechnique, et aux candidats qui se préparent à y être admis.





A PARIS,

Chez Mad. Ve. BERNARD, Libraire, quai des Augustins;
FIRMIN DIDOT, Libraire, rue de Thionville.

M. DCCC. IX.



IMPRIMERIE DE H. PERRONNEAU.

A SA MAJESTÉ L'EMPEREUR

ALEXANDRE Ier.,

AUTOCRATE DE TOUTES LES RUSSIES.

SIRE,

Unir la bonté qui gagne les cœurs à la fermeté qui fait respecter les lois, mériter la confiance de ses alliés et l'estime de ses ennemis, protéger les sciences et les lettres en accueillant ceux qui les cultivent, telles sont les qualités brillantes qu'on voit réunies dans VOTRE MAJESTÉ, *et qui commandent l'amour des peuples et les hommages de la*

postérité. C'est à l'intérêt que vous ont toujours inspiré les sciences exactes, que je dois, Sire, *la faveur que vous m'avez accordée de faire paroître mon ouvrage sous vos auspices. Cet honneur, celui d'être associé aux savans qui composent les deux sociétés les plus célèbres de vos états, sont des témoignages éclatans qui me font espérer l'indulgence que mon obscurité ne me permettroit pas d'obtenir.*

Je suis, avec le plus profond respect,

Sire,

De Votre Majesté,

Le plus humble et le plus dévoué serviteur,

FRANCOEUR.

Paris, le 17 avril 1809.

PRÉFACE.

J'AI eu pour but, en composant ce Traité, que tout lecteur attentif et intelligent, sans aucunes connoissances en mathématiques, fût rendu capable de lire avec fruit les collections académiques. Pour accomplir ce projet, j'ai dû me pénétrer de plusieurs vérités essentielles.

1°. Les démonstrations doivent être parfaitement rigoureuses, afin de conserver aux sciences mathématiques le caractère de certitude qui les distingue.

2°. Les démonstrations ne doivent jamais renfermer d'élémens qui leur soient étrangers; en sorte que chaque théorie ne soit établie que sur les notions qui en sont inséparables.

3°. Il faut donner à la série des propositions, et à l'examen de chacune d'elles l'ordre le plus naturel, celui que les inventeurs ont dû observer, subordonné toutefois à l'ensemble qu'exige un traité composé d'un si grand nombre de doctrines.

4°. J'ai dû analyser l'esprit des ouvrages des plus célèbres géomètres, Newton, Leibnitz, Euler, Lagrange, Laplace, les Bernoully, etc., afin de n'em-

ployer que les méthodes dont ils ont pratiqué ou recommandé l'usage; et, qu'en passant de la lecture de ce Traité à celle des plus savans mémoires, on n'y trouve ni solution de continuité, ni un nouveau langage.

5°. Toutes les théories doivent être liées par une méthode uniforme, en sorte qu'on puisse non-seulement les comprendre toutes, mais encore se livrer de soi-même à d'autres recherches analogues. Il ne me semble pas suffisant que l'élève soit convaincu des vérités qu'on lui présente, il faut qu'il soit aussi dans le secret des inventeurs, et, qu'en admirant leurs découvertes, il reconnoisse l'esprit qui les a dirigés.

Pour atteindre le but que je me suis proposé, j'ai donc dû m'environner de conseils. Ceux de Poisson, Biot, Ampère, m'ont été fort utiles. J'ai sur-tout médité les écrits des Laplace, des Lagrange. Ces hommes extraordinaires, les rivaux des Newton, des Euler, ont transporté à la France le sceptre des mathématiques, que l'Angleterre et l'Allemagne ont tenu tour-à-tour; et, malgré l'élévation où leurs pensées admirables les entraînent, ils n'ont pas dédaigné d'écrire sur les matières qui paroissent le moins dignes de leur attention. Mais l'instruction d'une jeunesse studieuse, le desir de conserver à la France l'empire des sciences, que notre Gouvernement protecteur affermit tous les jours; enfin le dessein d'éclairer

cette partie des mathématiques, des vives lumières que leur gloire avoit répandues sur toutes les autres, sont des motifs qui leur ont paru avoir assez de force.

L'onvrage où ils ont le plus dévoilé le secret de l'instruction, et que les instituteurs ne peuvent se passer de lire, est celui des *Ecoles normales.* Pour justifier la méthode que j'ai suivie, j'en citerai le passage suivant, tom. IV, pag. 50. C'est M. de Laplace qui parle.

« La méthode des limites sert de base au calcul « infinitésimal. Pour faciliter l'intelligence de ce calcul, « il est utile d'en faire remarquer les germes dans « les vérités élémentaires qu'il convient toujours de « démontrer suivant les méthodes les plus géné- « rales. On donne ainsi à la fois aux élèves des con- « noissances et la méthode d'en acquérir de nouvelles. « En continuant de s'instruire, il ne font que suivre « la route qui leur a été tracée, et dans laquelle « ils ont contracté l'habitude de marcher, et la car- « rière des sciences leur devient beaucoup moins « pénible. D'ailleurs, le système des connoissances « liées entre elles par une méthode uniforme, peut « mieux se conserver et s'étendre. Préférez donc, « dans l'enseignement, les méthodes générales ; atta- « chez-vous à les présenter de la manière la plus « simple, et vous verrez, en même tems, qu'elles « sont toujours les plus faciles. »

Je me suis entièrement soumis à ces sages conseils; aussi ai-je employé partout la méthode des limites, que j'ai seulement présentée d'une manière nouvelle, et à laquelle j'ai rappelé la théorie des incommensurables.

On remarquera que l'algèbre succède à l'arithmétique, et qu'elle est interrompue par la géométrie. C'est le résultat d'un systéme que suivent tous les bons professeurs; et, quoique l'algèbre ne soit pas nécessaire pour l'étude des vérités géométriques, on peut sentir combien cette science en facilite l'intelligence.

Je me suis beaucoup moins attaché aux formes consacrées en géométrie, qu'à la méthode même qui en fait le caractère; en conséquence, je n'ai pas évité l'emploi des équations, lorsque cela m'a paru nécessaire; mais je ne l'ai fait qu'avec sobriété, en rejetant dans l'application de l'algèbre à la géométrie, tout ce qui exigeoit l'emploi d'une analyse moins simple, et en me laissant guider par les réflexions suivantes.

Il est clair que les proportions dont on fait usage en géométrie, ne sont autre chose que des équations qui s'élèvent même jusqu'au 2e. et 3e. degré; que les *addendo*, *invertendo*, ... qu'on leur fait subir, reviennent à l'élimination d'une inconnue entre deux équations. Il en résulte donc que les formes consacrées à la géométrie ne proscrivent nullement l'usage

des équations. Mais on remarquera que cet usage doit être très-limité : le caractère essentiel à la géométrie consiste en ce que l'évidence la plus complète résulte de la clarté des élémens même qu'on emploie, et de la manière de les combiner, qui ne doit jamais laisser perdre de vue l'objet principal. De plus, la série des propositions n'offre pas une liaison aussi nécessaire; elles sont, pour ainsi dire, isolées les unes des autres. C'est ainsi qu'on pourroit savoir que le volume de la sphère est le produit de sa surface par le tiers du rayon, sans savoir que cette surface est quadruple d'un grand cercle.

Je crois avoir rempli exactement toutes ces conditions, sans me soumettre aux formes qu'a employées Euclide, formes qui, probablement, résultoient de la manière dont on étudioit alors les sciences, et du peu d'étendue qu'on pouvoit leur donner. J'ai cru que cet usage d'énoncer les propositions avant de les démontrer, rendoit plus pénible le travail de la mémoire, sans faciliter l'intelligence, et éloignoit de l'esprit d'invention. En effet, toutes ces formes, empruntées par tous les autres auteurs, ne constituent pas même un des attributs de la géométrie; et nous avons vu des démonstrations véritablement analytiques qu'elles servoient à masquer, tandis que, d'un autre côté, elles font souvent disparoître la clarté, qui est indispensable, lorsque les élémens deviennent un peu composés.

Je ne prétends, au reste, critiquer les ouvrages

de personne, mais je desire justifier ma manière de voir. Je serai trop heureux si on me pardonne d'avoir écrit sur des matières traitées avec taut de succès par MM. Legendre et Lacroix, mes maîtres et mes régulateurs. Si j'ai cru pouvoir écrire après eux, ce n'est point un fol orgueil qui m'a fait présumer que mon travail seroit meilleur; j'ai seulement pensé qu'il seroit différent, et ce motif doit me faire trouver grâce. En effet, dans l'exposition des vérités élémentaires, il peut être très-utile de consulter plusieurs auteurs; on en retire le même avantage que si on entendoit discuter sur chaque objet plusieurs professeurs. Les termes dont on se sert, l'ordre qu'on observe, la manière dont on présente les idées, tout donne à une même chose une apparence différente, qui tend à faire éclater la lumière si nécessaire dans les sciences. Ainsi, malgré l'estime méritée que le public a accordée à d'autres ouvrages, peut-être ne désapprouvera-t-il pas les efforts que j'ai tentés pour lui être utile.

Lorsqu'on fera attention à la multitude des objets que doit comprendre ce Traité, et au peu d'espace dans lequel il est renfermé, on sera tenté de croire que j'y ai négligé beaucoup de parties, et que ce Cours est très-incomplet. Quoique la lecture de l'Ouvrage doive faire revenir de cette opinion, cependant j'exposerai ici mes motifs, afin de détruire une prévention aussi défavorable.

L'expérience m'a pleinement convaincu que rien

n'est plus contraire au but que doit atteindre celui qui écrit sur les sciences, que d'entrer sur chaque point dans les détails les plus circonstanciés. L'auteur, en disant tout ce qu'il pense, empêche son lecteur de penser lui-même ; l'élève devient incapable de se passer des secours de son maître ; il prend l'habitude d'une pesanteur très-nuisible à ses progrès ; enfin la prolixité des détails l'empêche de suivre le fil des idées essentielles, et il saisit mal l'ensemble des propositions, ce qui est le point le plus important. Il me semble que c'est le professeur qui doit proportionner l'étendue des développemens à la nature de l'esprit de chacun de ses élèves.

D'après ces motifs, j'ai donc supprimé beaucoup de détails inutiles, des calculs que chacun peut exécuter, enfin tout ce qui ne m'a pas semblé nécessaire : néanmoins je n'ai rien négligé de ce qui pouvoit avoir de l'importance ; j'ai sur-tout multiplié les exemples beaucoup plus qu'on n'a coutume de le faire dans ces sortes de traités, et je n'ai jamais perdu de vue le conseil d'Horace,

Brevis esse laboro, obscurus fio.

Il m'eût été sans doute bien plus facile de multiplier les volumes, et ce n'est qu'après beaucoup d'essais et de peines, que j'ai obtenu le degré de concision que je souhaitois. J'ajouterai que dans un traité de cette nature, ce n'est pas un avantage à

négliger, que de mettre l'étude à la portée de toutes les fortunes. C'est pour cela que j'ai fait beaucoup serrer le texte, afin de diminuer les volumes.

Cet Ouvrage comprend les doctrines de Mathématiques pures qui sont enseignées dans les Écoles Polytechnique et Normale, ainsi que celles qu'on exige des élèves qui concourent pour y être admis. La plupart des matières renfermées dans le premier volume, et quelques-unes de celles du second, sont nécessaires à ceux-ci. J'ai indiqué par des étoiles (*), en marge, les articles qu'on ne demande pas aux candidats de ces Écoles.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES

DANS LE PREMIER VOLUME.

LIVRE I. ARITHMÉTIQUE.

LIVRE II. ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

LIVRE III. GÉOMÉTRIE.

LIVRE IV. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES PURES.

LIVRE PREMIER.
ARITHMÉTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.
DES NOMBRES ENTIERS.

1. *Notions préliminaires.*

1. La nécessité de distinguer entre elles les grandeurs de divers systèmes d'objets semblables, de ne pas confondre, par exemple, trois hommes, avec dix hommes, avec cent hommes, a forcé de recourir à des dénominations propres à caractériser chaque assemblage. On nomme Unité l'un des objets qui le composent ; le Nombre ou la Quantité désigne combien il contient de ces objets. De là dérivent les mots.

Un deux trois quatre cinq six sept huit neuf dix et les *chiffres* ou caractères pour représenter ces nombres
1 2 3 4 5 6 7 8 9 .....

2. Souvent on veut réunir plusieurs assemblages en un seul, c'est-à-dire, les *Ajouter* : cette Addition s'indique par le signe +, qu'on prononce *Plus*, et qu'on appelle *Positif*. Le résultat de l'addition s'appelle *Somme*. Ainsi 2 + 3 + 4 valent 9, signifie que 9 est la somme des nombres 2, 3 et 4; ou bien, que si on réduit en un seul trois systèmes composés l'un de 2, l'autre de 3, le dernier de 4 objets semblables, il y en aura 9 dans l'assemblage entier.

Le signe = est celui de l'égalité; $2 + 3 + 4 = 9$, s'énonce 2 plus 3, plus 4, égale 9 : cette égalité ou *Equation* exprime l'opération ci-dessus, $2 + 3 + 4$ est le premier *Membre*, 9 est le second.

L'inégalité entre deux quantités, se désigne par le signe > ou <; on place la plus grande du côté de l'ouverture : par exemple $4 < 7$, $9 > 3$.

3. Il arrive quelquefois que les nombres qu'on veut ajouter sont égaux entre eux; tels que $2 + 2 + 2 + 2 = 8$. Cette espèce d'addition prend le nom de *Multiplication*; on l'énonce ainsi : 2 *répété* 4 *fois*, ou 4 *fois* 2, ou enfin 2 *Multiplié par* 4. Cette opération s'écrit 2.4, ou $2 \times 4 = 8$. Les nombres 2 et 4 se nomment les *Facteurs*; 2 est le *Multiplicande*, 4 le *Multiplicateur*; le résultat 8 est le *Produit*.

4. Ces deux opérations ont leurs inverses. Ainsi dans l'addition, connoissant deux nombres 5 et 4, on se propose de trouver leur somme 9 : dans la *Soustraction*, ce résultat 9 est donné, ainsi que le nombre 5 et on demande l'autre 4, c'est-à-dire, qu'il faut trouver le nombre qui ajouté à 5 donne 9; cette opération revient à retrancher 5 de 9, elle s'indique par le signe —, qu'on prononce *Moins*, et qu'on appelle *Négatif*. Ainsi on écrira $9 - 5 = 4$. Le résultat 4 se nomme *Reste* ou *Différence*.

5. Dans la multiplication on donne les deux facteurs et on cherche leur produit ; on connoît 2 et 4, et on demande 2×4 ou 8. Mais si on connoissoit le produit 8, et l'un des facteurs 2, on pourroit se proposer de trouver l'autre facteur 4. Cette opération qu'on appelle *Division*, s'indique ainsi $\frac{8}{2}$, ou 8:2, et s'énonce 8 *Divisé par* 2. Le nombre 8 est le *Dividende*, 2 est le *Diviseur*, le résultat 4 est le *Quotient*.

On voit donc que les mots *Produit* et *Dividende* désignent le même nombre, et qu'ils ne diffèrent qu'en raison de l'opération qu'on veut faire. Il en est de même du diviseur et du quotient relativement au multiplicateur et au multiplicande.

Il s'agit maintenant d'enseigner à pratiquer ces quatre opérations sur toute quantité ; mais avant il faut savoir exprimer par des caractères tous les nombres possibles.

2. *Système de la Numération.*

6. Si on eût continué à donner au-delà de neuf, dix, onze. . . . . . des noms à chaque nombre, et de leur affecter un chiffre particulier, on seroit tombé dans l'inconvénient d'avoir une multitude infinie de mots et de caractères. C'est ce qu'on évite par un procédé aussi simple qu'ingénieux : on est convenu que *tout chiffre mis à la gauche d'un autre vaudroit dix fois plus que s'il occupoit la place de ce dernier.* En outre, on a imaginé un chiffre 0, qu'on nomme *zéro* et qui n'a aucune valeur particulière.

D'après cela pour écrire le nombre $9 + 1$, qu'on appelle *dix*, on écrit 10, $10 + 1$ ou *onze* est représenté par 11 ; et ainsi de suite pour *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze*, *seize* qu'on écrit 12, 13, 14, 15,

16; dans tous ces cas le chiffre 1 vaut dix, parce qu'il occupe le second rang.

De même, *vingt*, *vingt-un*, *vingt-deux* . . . sont représentés par 20, 21, 22 . . . parce que le chiffre 2 du second rang, vaut 2 fois 10, nombre qu'on est convenu d'appeler *vingt*. *Cent*, *cent-un*, *cent-deux* . . . sont écrits ainsi 100, 101, 102, . . . etc.

Il est aisé de reconnoître qu'à l'aide de cette convention on pourra écrire tous les nombres possibles avec dix caractères seulement : car pour augmenter de *un* tout nombre, tel que 537, il suffit de remplacer le chiffre 7 qui est à droite, par celui qui lui succède dans la série 1, 2, 3, 4. . . 7, 8, 9 : on a ainsi 538.

Si le chiffre à droite étoit un 9, on le remplaceroit par 0, et l'augmentation de *un* devroit frapper sur le chiffre à gauche du 9. Ainsi pour $539+1$, on remplacera le 3 par 4, et le 9 par zéro, ce qui donne $540 = 539 + 1$. De même $12999 + 1 = 13000$, $509 + 1 = 510$, $999 + 1 = 1000$. . . .

7. Formons maintenant une langue pour énoncer tous les nombres, sans multiplier les noms à l'infini : pour cela *convenons d'énoncer tour-à-tour les chiffres qui composent un nombre de trois caractères, en qualifiant chacun d'eux d'une dénomination qui en indique le rang.*

Et d'abord le chiffre du second rang, qu'on appelle *dixaines*, prendra les noms suivans; 10 se nommera *dix*; 20, *vingt*; 30, *trente*; 40, *quarante*; 50, *cinquante*; 60, *soixante*; 70, *septante* ou *soixante et dix*; 80, *octante*, ou *quatre-vingt*; 90, *nonante*, ou *quatre-vingt-dix*. Ainsi 45, 57, 72, 93, s'énoncent quarante-cinq, cinquante-sept, soixante-douze ou septante-deux, quatre-vingt-treize ou nonante-trois.

On pourroit énoncer 11, 12, 13 . . . par dix-un,

dix-deux, dix-trois, . . . comme on dit, dix-sept, dix-huit, . . . mais l'usage a imposé d'autres dénominations : onze, douze, treize. . . .

Le chiffre du troisième rang, ou des *Centaines*, se distingue par le mot *Cent*. Ainsi 245 se lit deux cent quarante-cinq : 205 fait deux cent-cinq : 374, trois cent soixante et quatorze. On sait donc dénommer un nombre exprimé par trois chiffres.

Mais si le nombre a plus de trois chiffres, on est convenu de le partager en tranches de trois chiffres à partir de la droite, d'énoncer chaque tranche à part en la distinguant par une dénomination propre. La 2e. tranche est celle des *mille*, la 3e. celle des *millions*, la 4e. celle des *milliards* ou billions, la 5e. celle des trillons (*).

21 546; 1111; 15 016; 8 004; 10 200 701;
50 001 000; 17 337 100 227.

s'énoncent vingt et un mille cinq cent quarante-six, ou 21 mille 5 cent 46 : onze cent onze : 15 mille seize : 8 mille-quatre : 10 millions 200 mille 7 cent un : 50 millions mille, 17 milliards 337 millions 100 mille 227.

Il est très-rare de rencontrer des nombres de plus de 12 chiffres : alors on peut se contenter d'énoncer chaque tranche à part, sans la dénommer en particulier, puisque le nom ne serviroit nullement à donner l'idée d'un nombre dont la grandeur excède la limite que notre esprit peut atteindre. On sait donc énoncer

(*) On auroit également pu composer les tranches de deux ou de quatre chiffres ; mais dans un nombre donné, il y auroit eu plus de tranches dans un cas et moins dans l'autre : en examinant les limites des nombres qui sont d'un usage plus ordinaire, il est aisé de voir qu'on a pris un milieu convenable entre ces deux partis.

un nombre écrit en chiffres et réciproquement, dans l'arithmétique *décimale* (*).

(*) Le même principe peut servir à écrire tous les nombres avec plus ou moins de dix chiffres. Supposons, par exemple, qu'on ne veuille employer que quatre caractères, alors un chiffre mis à la gauche d'un autre doit valoir quatre fois plus que s'il occupoit la place de celui-ci; 10 vaut quatre, 11 cinq, 12 six, 13 sept, 20 huit, 21 neuf, etc.

Lorsqu'on veut énoncer un nombre déja écrit, où réciproquement, on rencontre ici plus de difficultés que dans le système décimal, parce que le langage ne concorde plus avec cette nouvelle disposition. Pour énoncer, par exemple, le nombre exprimé par 4123 dans le système de numération à cinq chiffres, 0, 1, 2, 3 et 4 (ce qui suppose qu'un chiffre mis à la gauche d'un autre vaut 5 fois plus que s'il en occupoit la place), il faudra multiplier le 2 par 5, le 1 par 5^2 ou 25, le 4 enfin par 5^3 ou 125, et on aura...... $4 \times 125 + 1 \times 25 + 2 \times 5 + 3$ ou 538 pour la valeur du nombre proposé, écrit dans le système décimal.

Réciproquement cherchons les chiffres qui expriment le nombre 434, dans le système à 5 caractères. Pour cela, remarquons que le calcul ci-dessus peut se faire en ordre inverse, en multipliant le 4 de 4123 par 5, et ajoutant le 1 à droite, ce qui donne 21; multipliant de nouveau 21 par 5, et ajoutant 2; enfin, multipliant le résultat 107 par 5 et ajoutant 3; on trouve encore 538 : on voit qu'en effet le 4 a été multiplié trois fois de suite par 5, le 1 deux fois, le 2 une fois.

D'après cela, divisons le nombre proposé 434 par 5, le reste 4 sera le 1er. chiffre à droite, et le quotient 86 sera la valeur des autres chiffres, lorsqu'on supprime ce 4; divisant de nouveau 86 par 5, le reste 1 sera le 2e. chiffre; divisant encore le quotient 17 par 5, on a pour 3e. chiffre le reste 2, et pour 4e. le quotient 3, qui étant moindre que 5, termine l'opération. L'expression cherchée est donc 3214.

On verra de même que 566 écrit avec 4 caractères donne 20312; que dans les systêmes à 6, 9 et 12 chiffres, le nombre 5035 est exprimé par 35151, 6814, 2*ab*7, *a* et *b* désignant *dix* et *onze* dans

3. *De l'Addition.*

8. Etant donnés plusieurs nombres, dont chacun est exprimé par un seul chiffre, nous supposerons que l'usage a appris à en trouver la somme, parce qu'il n'y a besoin d'aucune règle à ce sujet.

Prenons maintenant les nombres . . . . $3731 + 349 + 12487 + 54$. Il est clair que si l'on fait séparément la somme des unités, dixaines, centaines, ... ces résultats réunis auront encore même somme. On trouvera ainsi 15 milles + 14 centaines + 20 dixaines + 21, ou, $15000 + 1400 + 200 + 21$: opérant de nouveau sur ces derniers nombres, il vient 1 dixaine de milles + 6 milles + 6 centaines + 2 dixaines + 1, ou 16621 qui est la somme cherchée.

Ce calcul se fait plus commodément en plaçant, comme on le voit ci-contre, les nombres l'un au-dessus de l'autre, en sorte que les chiffres de même ordre se correspondent verticalement; on écrit au bas de chaque colonne, la somme qu'elle donne, lorsque cette somme n'excède pas 9; autrement, on ne pose que les unités et on réserve les dixaines pour les ajouter à la colonne suivante; c'est pour cela qu'on commence cette opération par la colonne des unités.

$$\begin{array}{r} 3731 \\ 349 \\ 12487 \\ 54 \\ \hline 16621 \end{array}$$

---

le système duodécimal. Cette dernière espèce de numération présente des avantages marqués sur les autres, parce que douze a plus de diviseurs que dix; mais il seroit trop difficile de l'établir maintenant, parce qu'il faudroit changer les dénominations et tous les nombreux usages qui en dérivent.

Voici plusieurs exemples d'addition :

5 783	77 756	10 376 786	5 784 201
4 328	3 388	789 632	749 832
5 987	9 763	589	14 378 539
8 521	90 257	73	20 912 572
24 619	181 164	11 167 080	

4. *De la Soustraction.*

9. Il est visible que si l'on connoissoit le nombre qui ajouté à 243 donne 695, il faudroit que ses unités + 3 donnassent 5 ; ses dixaines + 4 = 9, ses centaines + 2 = 6. On écrira donc les nombres donnés, comme pour l'addition, le plus petit en dessous, puis on retranchera chaque chiffre inférieur de son supérieur. On dira donc 5—3=2, 9—4=5, 6—2=4, et on aura 452 pour reste.

695
243
452

Mais il peut arriver que le chiffre supérieur soit moindre que l'inférieur, comme dans l'exemple suivant, où on ne peut ôter 8 de 7. Il est clair qu'alors le nombre cherché qu'on doit ajouter à 8, ne pouvant donner 7, a dû avoir 17 pour somme, et qu'on a retenu la dixaine pour la joindre à la colonne suivante ; il suit de là qu'on doit dire, non pas 7—8, mais 17—8=9, et écrire 9 au rang des unités ; puis 4—3=1, et non plus 4—2, puisqu'on a retenu une dixaine pour l'ajouter à la colonne suivante composée de 2 et du chiffre inconnu ; 4 est donc la somme de ce chiffre et de 2+1 ou 3.

36 147
19 328
16 819

En général, *lorsque le chiffre supérieur sera le plus foible on l'augmentera de* dix, *puis on retiendra* un *pour le joindre au chiffre inférieur qui est à gauche.* On

continuera le calcul ci-dessus de cette manière : 1 — 3 ne se peut, 11 — 3 = 8 ; 6 — 10 ne se peut, 16 — 10 = 6 ; enfin 3 — 2 = 1.

Pareillement dans l'exemple ci-contre, on dira 9—3=6 ; 2—7 ne se peut, 12—7=5 ; 4—5 ne se peut, 14—5=9 ; 0—9 ne se peut, 10—9=1 ; 0—8 ne se peut, 10—8=2 ; 0—6 ne se peut, 10—6=4 ; enfin 3—3=0 qu'il est inutile d'écrire.

3 000 429
2 578 573
421 856

Voici quelques autres exemples de soustraction :

3000	6000	6000	150 001	375 831
1296	4000	5999	76 385	186 943
1704	2000	1	73 616	188 888

10. Lorsqu'on veut retrancher un nombre d'un autre formé de l'unité, suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans le premier, il suffit de *retrancher les unités de* 10 *et les autres chiffres de* 9 : c'est ce qu'on appelle *le Complément arithmétique* de ce nombre. C'est ainsi que 1 000 000 — 279 953 donne 720 047 pour reste. Ce calcul est si facile qu'à peine mérite-t-il d'être compté pour une opération. On s'en sert pour ramener toute soustraction à une addition : voici comment.

Soit demandé 3487 — 259 ; il est clair qu'on peut ajouter et soustraire 1000, ce qui donne . . . . . 3487 + 1000 — 259 — 1000 : or le complément de 259 est 741 = 1000 — 259 ; ainsi on a pour la différence cherchée 3487 + 741 — 1000, ou 4228 — 1000 = 3228. On voit par là qu'au lieu de retrancher un nombre, on peut en ajouter le complément, pourvu qu'on retranche ensuite une unité de l'ordre immédiatement supérieur à celui du nombre à soustraire. L'opération

s'indique alors comme on le voit ci-contre, en désignant par $\bar{1}$ que le chiffre 1 doit être soustrait ; en sorte que le *nombre ainsi écrit*, *ajouté à la quantité à soustraire*, *donne zéro pour somme* ; $\bar{1}741 + 259 = 0$.

$$\begin{array}{r} 3487 \\ \underline{\bar{1}741} \\ 3228 \end{array}$$

Ce calcul est sur-tout utile lorsqu'on a plusieurs additions et soustractions successives. Soit, par exemple, $32731 + 5729 - 371 - 4834$; on emploie les complémens de 371 et 4834, qui sont $\bar{1}629$ et $\bar{1}5166$, et on a pour résultat 33255.

$$\begin{array}{r} 32731 \\ 5729 \\ \bar{1}629 \\ \underline{\bar{1}5166} \\ 33255 \end{array}$$

5. *De la Multiplication.*

11. En ajoutant 7 cinq fois, et 5 sept fois, on trouve le même produit 35 ; dont $7 \times 5 = 5 \times 7$; on prouve qu'il en est de même de tous les nombres, c'est-à-dire, qu'*on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit*. Formons en effet le tableau *A* de 5 lignes, dont chacune contient 7 points ; le nombre de points est 7×5 ; mais si on renverse ce tableau comme on le voit en *B*, le nombre des points sera le même et exprimé par 5×7 ; d'où $5 \times 7 = 7 \times 5$.

. . . .
. . . .
. . . . *A*
. . . .
. . . .

. . . . .
. . . . .
. . . . .
. . . . . *B*
. . . . .
. . . . .
. . . . .

On désigne par $7 \times 5 \times 2$ qu'après avoir multiplié 7 par 5, il faut multiplier de nouveau le produit 35 par 2 ; mais le produit 7×5 n'est autre chose que $7+7+7+7+7$; pour le multiplier par 2, il suffit de répéter 2 fois chaque partie, ou $14+14+14+14+14$. Donc, ... $7 \times 5 \times 2 = 7 \times 2 \times 5$. Puisqu'on peut changer les deux derniers facteurs de place, et qu'il en est de même des deux premiers, il sera facile d'en conclure que l'ordre de

la multiplication de trois facteurs peut être interverti à volonté. Il en seroit de même pour un plus grand nombre de facteurs.

Prouvons, par exemple, que $7\times5\times2\times4=4\times5\times2\times7$; comme on peut intervertir l'ordre des trois premiers facteurs, il suffit de faire voir que $5\times2\times7\times4=5\times2\times4\times7$, ou $10\times7\times4=10\times4\times7$; or cela résulte de ce qu'on a démontré.

12. Lorsqu'il arrive qu'un nombre est plusieurs fois facteur, comme $3\times3\times3\times3$, on dit que 3 est *élevé à la 4e. puissance*, et on indique le produit par 3^4: ce chiffre 4 est appelé *Exposant; il indique le nombre de fois qu'une quantité est facteur*. De même. . . . . . $2^3=2\times2\times2=8$. La puissance 2 se nomme aussi le *Carré*, et la puissance 3 le *Cube* : on en verra la raison plus tard (251, 306.) C'est ainsi que 49 est le carré de 7 ou $7\times7=7^2$, et que 216 est le cube de 6 ou $6\times6\times6=6^3$.

Réciproquement le nombre qui porte un exposant se nomme une *Racine;* de sorte que 7 est la racine carrée de 49, cubique de 343, 4e. de 2401, parce que. . . $7^2=49$, $7^3=343$, $7^4=2401$... ces racines s'indiquent par le signe $\sqrt{}$; $7=\sqrt[3]{343}=\sqrt[4]{2401}$. Lorsqu'on ne désigne pas le degré de la racine, on suppose qu'il s'agit de la racine carrée. On dit donc que 7 est la racine de 49, et on écrit $7=\sqrt{49}$.

13. Puisque pour multiplier un nombre, il suffit de l'ajouter à lui-même un nombre convenable de fois (3), il sera facile d'avoir le produit lorsque les facteurs n'auront qu'un seul chiffre. Le tableau suivant se forme en ajoutant 9 fois successives le nombre 1 à lui-même pour la première ligne horisontale, le nombre 2 pour la seconde, et ainsi de suite.

Table de Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Veut-on trouver le produit 7×5? On cherche 7 dans la première ligne horisontale, et on descend dans la colonne verticale correspondante, jusqu'à ce qu'on rencontre le nombre 35, qui se trouve dans la ligne qui commence par 5; on a $7 \times 5 = 35$.

Il importe de se rendre très-familiers les produits des nombres simples, afin de n'être pas obligé de recourir chaque fois à la table de Pythagore.

14. Il seroit très-long, pour les nombres un peu grands, d'exécuter la multiplication en *ajoutant le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur*, ainsi qu'il résulte de la définition (3). Nous allons exposer les moyens plus commodes qui servent à obtenir le produit. Il se présente deux cas.

1er. *Cas.* Pour multiplier 2957 par 8, imaginons, pour un moment, qu'on ajoute en effet 8 fois 2957; la colonne des unités sera formée du chiffre 7 répété 8 fois; la somme sera donc 7×8 ou 56 : on posera 6, et on retiendra 5 pour joindre à la colonne des dixaines. Cette

colonne est composée du chiffre 5 écrit 8 fois ; on dira donc $5 \times 8 = 40$, ajoutant la retenue 5, on a 45 ; on posera 5 et on retiendra 4, etc.... On voit donc que cette opération revient à *multiplier chaque chiffre du multiplicande par le multiplicateur, en commençant par les unités, écrire sous chaque chiffre les unités du produit qu'il a donné, et retenir les dixaines pour les joindre au produit suivant.*

$$\begin{array}{r} 2957 \\ 8 \\ \hline 23656 \end{array}$$

Ce procédé n'est à proprement parler que l'addition même, excepté qu'on se dispense d'écrire plusieurs fois le nombre à ajouter.

15. 2e. *Cas.* Pour multiplier 2327 par 532, il est clair qu'on peut répéter 2327, 2 fois, 30 fois et 500 fois, puis ajouter le tout. On multipliera d'abord 2327 par 2, comme on vient de le dire, et on aura 4654. Ensuite pour 2327×30, remarquons que si on ajoutoit en effet 30 fois le nombre 2327, ou ce qui revient au même 2327 fois le nombre 30, la colonne des unités donneroit *zéro*, et celle des dixaines 2327×3 ou 6981 ; ainsi on voit qu'il faudra chercher le produit 6981 du multiplicande 2327 par 3, et écrire ce produit sous 4654, mais en reculant d'un rang vers la gauche. Le même raisonnement prouve que pour multiplier 2327 par 500, il faut écrire le produit 2327×5 ou 11635 en reculant de deux rangs vers la gauche.

$$\begin{array}{r} 2327 \\ 532 \\ \hline 4654 \\ 6981 \\ 11635 \\ \hline 1237964 \end{array}$$

On voit donc qu'*il faut multiplier l'un des facteurs par chacun des chiffres de l'autre ; écrire les produits de manière que les unités de chacun d'eux soient placées au-dessous du chiffre du multiplicateur qui a donné le produit : on ajoute ensuite le tout.*

Il convient d'être très-exercé à la pratique de cette règle ; nous en mettrons ici trois exemples.

886 633	53 687	5 554 444
777	908	79 765
6 206 431	429 496	27 772 220
62 064 31	48 318 3	333 266 64
620 643 1	48 747 796	3 888 110 8
688 913 841		49 989 996
		388 811 08
		443 050 225 660

16. Lorsque l'un, au moins, des facteurs est terminé par des zéros, il suit de la méthode même que nous venons d'exposer, qu'on peut supprimer ces zéros, pourvu qu'on en ajoute un nombre égal à la suite du produit. Par exemple $406 \times 27 = 10962$; donc. . . . . 4060×2700 donne le même produit, suivi de 3 zéros ou 10 962 000. De même pour obtenir $1000 \times 100\,000$, on place 8 zéros après 1, et on a 100 000 000.

6. *De la Division.*

17. Puisque le produit est formé du multiplicande ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur; on voit que ce produit contient l'un des facteurs, autant de fois qu'il est marqué par l'autre. Ainsi, *le quotient indique le nombre de fois que le diviseur est contenu dans le dividende.* On pourroit donc trouver le quotient en faisant la soustraction réitérée du diviseur, autant de fois qu'il seroit possible de l'ôter du dividende.

C'est de cette propriété que dérivent les dénominations de dividende, diviseur et quotient, puisque pour faire plusieurs parts égales d'une quantité, il faut la diviser par le nombre

des parts, et que le quotient exprime la grandeur de chacune.

On voit aussi que le produit 35 de 7 par 5 est 7 fois plus grand que 5, et que le quotient 5 de 35 divisé par 7 est 7 fois plus petit que 5.

18. De $35 = 7 \times 5$, on conclut que 35 divisé par 7 donne 5 pour quotient : mais si l'on veut diviser 38 par 7, on sera obligé de décomposer le dividende 38 en deux parties dont l'une soit 7×5, ainsi $38 = 7 \times 5 + 3$; 3 se nomme le *Reste* de la division, qui ne peut se faire exactement (en nombre entier.)

En général, lorsqu'en multipliant par 1, 2, 3...... un nombre, on trouve parmi les produits successifs une quantité donnée, on dit qu'elle est *Multiple* de ce nombre, ou *Divisible* par ce nombre : 35 est multiple de 7, ou divisible par 7. Les multiples de 2 sont des nombres *Pairs*; on nomme *Impairs* ceux qui ne sont pas divisibles par 2. On dit qu'un nombre est *Premier*, quand il n'est divisible que par lui-même et l'unité.

En prenant pour dividende et pour diviseur deux nombres quelconques, on doit donc dire que *le quotient multiplié par le diviseur, donne un produit qui ajouté au reste, a pour somme le dividende.* Le reste est moindre que le diviseur, puisque sans cela, l'une des parties du dividende décomposé, n'auroit pas été le plus grand multiple du diviseur.

19. La table de Pythagore donne le quotient, quand il n'est exprimé que par un seul chiffre, ainsi que le diviseur. Veut-on diviser, par exemple, 35 par 7? On descendra dans la colonne verticale du nombre 7, jusqu'à 35 qui est sur la ligne horisontale qui commence par 5 ; donc 5 est le quotient cherché, ou $\frac{35}{7} = 5$. Pour diviser 65

par 9, comme on ne trouve pas 65 dans la 9e. colonne, mais seulement 63, on a donc $65 = 7 \times 9 + 2$; 7 est le quotient et 2 le reste. Il faut se rendre ces divisions simples très-familières, afin de les effectuer de mémoire et sans recourir à la table de Pythagore.

20. Pour exécuter les autres divisions, nous distinguerons deux cas, suivant que le diviseur a un seul chiffre ou plusieurs.

1er. *Cas.* Divisons 40761 par 7: il s'agit de trouver un nombre qui multiplié par 7 reproduise 40761; si ce quotient étoit connu, on le vérifieroit en multipliant ses unités par 7, ce qui devroit donner le produit 1, en retenant les dixaines. Le produit des dixaines du quotient par 7, joint à la retenue, devroit de même donner 6; les centaines, 7; les milles enfin 40. Le quotient n'a point de dixaines de mille, puisque 10000×7 donne $70000 > 40761$. Il suit de là que 40 contient le produit de 7 par le chiffre des milles du quotient et en outre la retenue faite sur les centaines. Le plus grand multiple de 7 contenu dans 40 est 35 ou 7×5; et puisque 40 est compris entre les produits de 7 par 5 et par 6, le quotient l'est lui-même entre 5000 et 6000, car ces nombres multipliés par 7 donnent des produits l'un $<$, l'autre $>$ 40000, ou l'un $<$ et l'autre $>$ que le dividende. Le plus grand multiple de 7 contenu dans 40, donne donc 5 pour le chiffre des milles du quotient; de plus, en retranchant 35 de 40, le reste 5 est la retenue faite dans la multiplication des centaines du quotient par 7. Si donc on joint les autres chiffres 761 du dividende, 5761 sera le produit de 7 par les parties inconnues du quotient.

40761	7
35...	5823
57..	
56..	
16.	
14.	
21	
21	
0	

Puisqu'il s'agit de diviser 5761 par 7, question semblable à la proposée, on fera le même raisonnement. On divisera donc 57 par 7, et le quotient 8 sera le chiffre des centaines : $7 \times 8 = 56$ qui ôté de 57 donne le reste 1 ; ainsi 161 est le produit de 7 par les unités et dixaines du quotient. 16 divisé par 7 donne 2 pour les dixaines du quotient ; $2 \times 7 = 14$, ôté de 16, il reste 2 : enfin $\frac{21}{7} = 3$, chiffre des unités. Le quotient cherché est donc 5823.

On remarquera dans le type de calcul que nous avons donné, qu'au lieu d'écrire auprès de chaque reste les autres chiffres du dividende, on s'est contenté d'abaisser le premier de ceux-ci, pour former le dividende partiel.

On sent assez que dans ce cas très-simple, où le diviseur n'a qu'un chiffre, non-seulement on peut soustraire chaque produit partiel sans l'écrire, mais qu'on peut aussi se dispenser d'écrire chaque reste. La division d'un nombre par 7, 5, 2 se réduit à en prendre le 7ᵉ., le 5ᵉ. la moitié...... ainsi que nous le ferons remarquer bientôt (30). Voici d'autres exemples de division.

$$\frac{12\,538}{2} = 6269\ ;\quad \frac{8765}{5} = 1753\ ;\quad \frac{97\,587}{7} = 13\,941\,.$$

2ᵉ. *Cas.* Proposons-nous maintenant de diviser 191 478 par 329 : le raisonnement sera absolument le même que précédemment. Puisque le quotient multiplié par 329 doit donner 191 478 pour produit, il faut qu'en multipliant 329 par les unités de ce quotient, et retenant les dixaines, on trouve 8 unités : que de même les dixaines, centaines de ce quotient inconnu, multipliées par 329, donnent 7 et 1914. Il n'y a pas de mille au quotient, puisque s'il étoit seulement 1000, en le multipliant par 329, on auroit 329000 pour dividende.

Ainsi 1914 contient le produit du diviseur 329 par le chiffre des centaines du quotient; il contient en outre la retenue provenant des autres produits. Supposons, pour un moment, qu'on sache trouver le plus grand multiple de 329 contenu dans 1914, et qu'il soit 5×329; 5 sera le chiffre des centaines, puisque 1914 étant compris entre 5 et 6 fois 339, le dividende total 191 478 l'est entre 500 et 600 fois 329, et le quotient entre 500 et 600. Multiplions donc 329 par 5, et retranchons le produit 1645 de 1914; le reste 269 est la retenue faite sur les autres produits du quotient par le diviseur, de sorte qu'en joignant les chiffres 78 qui restent au dividende, 26 978 divisé par 329, doit donner au quotient les unités et dixaines inconnues.

```
191 478 { 329
164 5..   582
-------
 26 97.
 26 32.
 ------
    658
    658
    ---
      0
```

On verra par conséquent que si on divise 2697 par 329, le chiffre 8 que donnera cette opération sera celui des dixaines : et comme $329 \times 8 = 2632$, qui, retranché de 2697, donne le reste 65, on voit que $\frac{658}{329}$ doit donner les unités 2 du quotient cherché, qui est donc 582.

Concluons de là que, *pour faire une division, il faut séparer vers la gauche du dividende les chiffres nécessaires pour contenir le diviseur; le plus grand multiple du diviseur contenu dans cette partie, donne le premier chiffre à gauche du quotient; on multiplie ensuite le diviseur par ce chiffre, et on retranche du dividende partiel : on descend enfin à côté du reste le chiffre suivant du dividende proposé, et on recommence la même opération jusqu'à ce qu'on soit parvenu à épuiser tous les chiffres de celui-ci.*

Si l'un des dividendes partiels ne contenoit pas le diviseur, on ne devroit pas oublier de mettre zéro au quotient, comme pour $\frac{147334}{362} = 407$.

Il est plus court de faire à la fois la multiplication et la soustraction : par exemple, lorsqu'il s'est agi de multiplier 329 par 5, et d'ôter le produit de 1914, on a pu dire : $5 \times 9 = 45$ qu'il faudroit soustraire de 4 ; mais comme cela ne se peut, on joint à 4 un nombre convenable de dixaines, et on a $54 - - 45 = 9$, qu'on pose sous le 4 ; et comme on a ainsi augmenté 1914 de 50, il faut, pour compenser, faire éprouver une augmentation égale au nombre à soustraire ; on retient donc 5 qu'on joint au produit suivant 2×5 ou 10 : il faut de même ôter 15 de 1, ou plutôt de 21, il reste 6 ; enfin $5 \times 3 + 2 = 17$, $19 - 17 = 2$, et le reste est 269.

$$\begin{array}{l|l} 1914.78 & 329 \\ \hphantom{0}269.7 & \overline{582.} \\ \hphantom{00}6.58 & \\ \hline \hphantom{0000}0 & \end{array}$$

On retranche de même de 2697 le produit 329×8 en disant $8 \times 9 = 72$, ôté de 77, il reste 5, et on retient 7 ; $8 \times 2 = 16$, plus 7 de retenue fait 23 ; ôté de 29, il reste 6, et on retient 2 : enfin $8 \times 3 + 2 = 26$, ôté de 26, on a zéro ; ainsi le reste est 65 : etc.

21. Il s'agit maintenant d'apprendre à trouver le quotient de la division de 1914 par 329. Supposons que ce quotient soit connu, il faudra le multiplier par 329, c'est-à-dire, par 9 unités, 2 dixaines et 3 centaines : ce produit ajouté au reste doit donner 1914. Il est aisé, d'après cela, de voir que 19 est formé, 1°. du produit de 3 par le quotient cherché ; 2°. des dixaines retenues sur le produit de 29, et de celles qui résultent de ce que 1914 n'est pas un produit exact. Comme on ne peut ôter de 19 ces dixaines excédantes et inconnues, on divise 19 par 3, ce qui donne 6 : et comme l'emploi d'un dividende trop grand, peut entraîner un quotient faux par excès, pour le vérifier, on cherchera $329 \times 6 = 1974$; ce

produit surpassant 1914, on voit que 6 est trop grand. On essaiera donc 5, qui convient au cas présent.

On prendra donc le premier chiffre à gauche du diviseur, et on supprimera les autres, puis on négligera de même vers la droite du dividende un nombre égal de chiffres : la division de ces deux parties donnera un quotient, qui pourra être trop grand ; mais qu'on vérifiera ensuite (*).

On doit remarquer que 1°. la division est la seule des quatre règles qui commence par la gauche.

(*) Le chiffre du quotient est faux sur-tout lorsque le second chiffre du diviseur est >5, parce que le produit fait refluer sur celui du premier chiffre un plus grand nombre d'unités. Ainsi soit $\frac{1443}{287}$; en disant $\frac{14}{2}=7$ on obtient un chiffre trop grand : on peut dans ce cas remplacer le diviseur 287 par 300, et dire $\frac{14}{3}=4$; mais l'erreur est en sens contraire, et le chiffre est ici trop foible, quoique plus près du vrai quotient qui est 5.

Quant à la vérification, on peut la faire en opérant de gauche à droite ; car si la soustraction d'un produit n'est pas possible, à plus forte raison ne le sera-t-elle pas lorsque les retenues auront accru le nombre à soustraire. Ainsi pour éprouver le quotient 6 dans la division de 1914 par 329, on dira $6\times3=18$, ôté de 19, il reste 1, qui joint au 1 suivant donne 11 ; $2\times6=12$ qu'on ne peut ôter de 11 ; donc 6 est trop fort et on doit essayer 5.

Dans aucun cas, la retenue ne peut égaler le multiplicateur, puisque s'il est 5, il faudroit que le chiffre multiplié fût $=10$ pour qu'on eût 5 à retenir. Si donc on fait à la fois la multiplication et la soustraction, la retenue sera au plus égale au multiplicateur ; et si en faisant l'épreuve comme il vient d'être dit, on trouve un reste égal au chiffre qu'on essaie, on doit en conclure qu'il n'est point trop fort. Soit, par exemple, $\frac{25064}{3577}$, le 8 résultat de $\frac{25}{3}$ est trop fort ; pour éprouver 7, on dira $3\times7=21$, ôté de 25 il reste 4 et on a 40 ; $7\times5=35$ de 40 il reste 5 ; enfin $7\times7=49$ ôté de 56 il reste 7, donc le 7 est bon. En général, l'épreuve doit être poussée jusqu'à ce qu'on ne puisse soustraire, ou jusqu'à ce qu'on trouve un reste au moins égal au chiffre éprouvé.

2°. Chaque reste est plus petit que le diviseur ; chaque dividende partiel se compose du produit du diviseur par le chiffre correspondant du quotient, et du reste ou de la retenue faite sur les autres produits : donc cette retenue est toujours moindre que le diviseur, et dans la division partielle, il ne peut en résulter pour le quotient un chiffre trop fort.

3°. Chaque chiffre qu'on descend près du reste donne un chiffre au quotient, il est donc bien facile de juger *à priori* du nombre de ceux qui le composent.

4°. Chaque quotient partiel ne peut excéder 9, qui est le plus grand des nombres d'un seul chiffre.

5°. Il conviendra de marquer par un point chaque chiffre descendu pour éviter les erreurs.

6°. Il est clair que si on double, triple,.... le multiplicande, le produit sera doublé, triplé, ... le multiplicateur ne variant pas : donc *on peut multiplier le dividende et le diviseur par un même nombre sans changer le quotient ; on peut aussi diviser l'un et l'autre par un même nombre* : $\frac{36}{9}$ a le même quotient 4, que $\frac{72}{18}$, que $\frac{12}{3}$. Si le dividende et le diviseur ont des zéros à leur droite, on peut donc en suprimer à chacun un égal nombre.

Voici quelques exemples de division.

```
     72 312.146 { 8369           386 782.67 { 93 887
      5 360  1  { ----            87 121  6 { ------
        338 74  { 8640             7 212 07 { 387
          3 986               -----------
     ----------          Reste..... 219 98
Reste.....3 986

          823 945 687 08.9 { 8 247 685 671
           81 653 976 69 9 { -------------
        ------------------ {      99
Reste... 7 424 805 66  0
```

700 200 031	683 679	25 677.875	2568
16 521 03	1024	2 565 8	9999
2 847 451		254 67	
Reste.... 112 735		23 555	
		Reste..... 443	

7. *Preuves des quatre Règles.*

22. Quoique le calcul de l'*Addition* soit fort simple, il est assez ordinaire d'y commettre des erreurs : c'est pourquoi, il faut vérifier la somme par une *Preuve.* On pourra refaire le calcul en opérant de bas en haut : on pourra aussi le faire de gauche à droite ; ainsi, dans l'exemple ci-contre, on commencera par la colonne des mille qui donne 6 ; et comme on trouve 7 à la somme, 7 — 6 = 1, indique qu'il y a eu 1 de retenu dans la colonne des centaines, qui, par conséquent, a donné 13. Mais cette colonne ne donne que 11 ; 13 — 11 ou 2 est donc la retenue des dixaines, etc. : à la colonne des unités, on doit trouver zéro pour différence.

2758
3099
469
1029
7355
1230

La preuve de la *Soustraction* se fait en ajoutant le reste au nombre à soustraire ; on doit retrouver le plus grand des deux nombres donnés.

23. On pourroit vérifier le produit d'une multiplication, en le divisant par l'un des facteurs ; le quotient seroit l'autre : mais la preuve seroit plus sujète à erreur que la règle, ce qu'il faut éviter. On pourra échanger entre eux le multiplicande et le multiplicateur (11). On peut aussi diviser l'un des facteurs par un de ses diviseurs exacts, multiplier l'autre par le même nombre et refaire l'opération. Dans ces deux cas on doit retrouver le même produit (*).

(*) Voici encore une autre preuve remarquable par sa simplicité.

On fait la preuve de la division en multipliant le quotient par le diviseur, puis ajoutant le reste : on doit retrouver le dividende (18).

8. *Quelques propriétés des Nombres.*

24. 1°. Décomposons un nombre quelconque en deux parties, dont l'une soit les unités : par exemple . . . $474 = 470 + 4$ ou $47 \times 10 + 4$; la première sera tou-

---

Supposons qu'on cherche le produit de 293 par 1572 ; décomposons 293 en deux parties dont l'une soit le reste de la division de 293 par 9 ; il vient $293 = 9 \times 32 + 5$; or, si on multiplie par 1572, la première partie 9×32 donnera un multiple de 9 ; de sorte que le produit 293×1572 divisé par 9, doit avoir le même reste que 5×1572 ; mais en décomposant à son tour 1572 de la même manière, $1572 = 9 \times 174 + 6$, et multipliant par 5, le reste de la division sera le même que celui de 5×6 qui est 3 ; on voit donc que le *reste qu'on obtient au produit est le produit des restes des facteurs.*

On divisera donc les facteurs et le produit par 9, et on vérifiera si cette condition est satisfaite ; la même chose auroit lieu pour tout autre diviseur que 9 ; mais la propriété (*Voy.* 24, 25) des nombres 9 et 11 les fait préférer à tout autre, comme étant d'un usage plus facile.

On a trouvé, par exemple, que $53\,687 \times 908 = 48\,747\,796$: pour vérifier ce calcul, on ajoute tous les chiffres des facteurs et du produit, ayant soin de supprimer 9 chaque fois que la somme excède ce nombre ; les restes ainsi obtenus sont 2, 8 et 7 ; or, $2 \times 8 = 16$, et 7 est le reste de $\frac{16}{9}$ (puisque $6 + 1 = 7$) : donc l'opération n'est pas fautive.

De même, en divisant 700 200 031 par 683 679 on a 1024 pour quotient, et 112 735 pour reste : en divisant ces quatre nombres par 9, on obtient les restes, 4 pour le dividende, 3 pour le diviseur, 7 pour le quotient et 1 pour le reste. Si la division se faisoit exactement, le reste du dividende seroit 3 fois $7 = 21$, ou plutôt 3 ; ajoutant 1, qui provient du reste, on trouve 4 pour l'excès du dividende sur les multiples de 9, ainsi que cela se vérifie.

jours divisible par 2 ; il faut donc que la seconde le soit aussi pour que le nombre soit un multiple de 2. Ainsi *tout nombre terminé par* 0, 2, 4, 6 *ou* 8, *jouit seul de la propriété d'être pair* (*).

2°. En décomposant le nombre en deux parties dont l'une soit formée des 2, 3, . . . derniers chiffres, on voit de même que *pour qu'un nombre soit multiple de* 4, *il faut que la quantité exprimée par ses deux derniers chiffres à droite soit divisible par* 4. *Les trois derniers forment un multiple de* 8, *lorsque le nombre est divisible par* 8, *etc.*

3°. *Tout nombre terminé par* 0 *ou* 5 *est seul divisible par* 5. Cela se démontre de même.

4°. En divisant 10 par 9 le reste est 1 ; il est donc aussi 1 pour 100, 1000 . . . ; donc pour 20, 200, 2000, . . . le reste doit être double, ou $= 2$; pour 30, 300, . . . il est 3, etc. Or, une quantité, telle que 8753, peut être décomposée en unités, dixaines, etc., ... $8000 + 700 + 50 + 3$: en divisant par 9, les restes $8 + 7 + 5 + 3$ donnent 23. Ainsi le reste de $\frac{8753}{9}$ est le même que celui de $\frac{23}{9}$, ou 5. Il suit de là que le reste de la division d'un nombre par 9, se trouve en ajoutant tous les chiffres, comme s'ils ne représentoient que de simples unités, et supprimant 9 chaque fois qu'il se rencontre.

Tout nombre dont la somme des chiffres est un multiple de 9, est divisible par 9.

5°. On verra aisément que ces deux propriétés appartiennent aussi au nombre 3.

25. La théorie des restes présente une remarque assez

(*) Cette propriété s'exprime algébriquement en disant que n étant un entier quelconque, $2n$ représente tous les nombres pairs, et $2n \pm 1$ tous les impairs.

curieuse. Divisons 10 par un nombre donné tel que 7 ; le reste est 3 : celui de $\frac{10^2}{7}$ est donc 3^2 (*Voy.* la note n°. 23), ou plutôt $9-7=2$: de même celui de $\frac{10^3}{7}$ est 2×3 ou 6 ; celui de $\frac{10^4}{7}$ sera $3 \times 6 = 18$, ou seulement $18-14=4$; et ainsi de suite. On aura donc en divisant par 7 les nombres 1 10 10^2 10^3... les restes 1 3 2 6 4 et 5 ; après quoi on retrouvera périodiquement les mêmes restes, ce qui est la conséquence du même principe d'où on part, et de ce que les restes sont moindres que 7.

On peut décomposer tout nombre, tel que 13 527 542, en $2+40+500+7000+$....; les restes de ces nombres divisés par 7 seront donc ceux désignés ci-dessus, répétés 2 fois, 4 fois, 5 fois,.... On écrira donc de droite à gauche les chiffres 1 3 2 6 4 5 1 3 2.. sous ceux du nombre proposé, on multipliera ensuite chacun par celui qui est au-dessus ; la somme 105 des produits sera le reste de la division, ou plutôt ce reste sera le même que celui de $\frac{105}{7}$ ou 0 ; en sorte que le nombre proposé 13 527 542 est divisible par 7.

13 527 542	
31 546 231	
1.2 =	2
3.4 =	12
2.5 =	10
6.7 =	42
etc.	
	105

Cette proposition a lieu pour tout diviseur. Par exemple, 2 et 5 divisent 10, donc les restes de 10, 100, . . . divisés par 2 et 5 sont zéro : ce qui reproduit les règles ci-dessus (1°, 3°.) si on divise 10 par 9 le reste est 1 ; donc $\frac{100}{9}$, $\frac{1000}{9}$, . . . donnent aussi 1 pour restes : il faudroit donc écrire 1 1 1 . . . sous les chiffres du dividende ; d'où on conclut de nouveau le procédé déja démontré (4°).

Revenons maintenant au cas où on a 7 pour diviseur : au lieu de prendre 6 pour reste de la division de 1000 par 7,

on peut supposer qu'il est -1 (*) ; ceux de $\frac{10^4}{7}$, $\frac{10^5}{7}$ sont -3 et -2, on peut donc dire que les restes 1 3 et 2 se reproduisent sans cesse, mais tour-à-tour il faut ajouter et soustraire les produits. L'opération ci-dessus est refaite ci-contre, en ayant égard à cette circonstance ; la barre indique les produits à soustraire, et $30 - 23$ ou 0 est le reste cherché.

13 527 542	
31 231 231	
7	2
6	12
10	10
23	3
	3
	30

En divisant 10 par 11 le reste est -1 (*), $\frac{100}{11}$ donne 1, ... de sorte que 1 et -1 sont les restes successifs que reproduit la division de 1 10 100 . . . par 11. On voit donc que si on ajoute tous les chiffres de rang impair d'un nombre donné, puis tous ceux de rang pair, et qu'on retranche cette dernière somme de l'autre, le reste sera celui de la division de ce nombre par 11.

Soit 732 931 ; comme $1+9+3=13$, $3+2+7=12$; on a 1 pour reste de $\frac{732931}{11}$. de même 429180 donne $0+1+2=3$, $8+9+4=21$; on ne peut ôter 21 de 3, mais ajoutant 2×11 à 3, on a 25 ; $25-21$ ou 4 est le reste cherché. 63 613 est multiple de 11, puisqu'on a $15-4=11$; d'où zéro pour reste.

26. Lorsqu'on divise un nombre impair par 6 (**), le reste ne peut être que 1, 3 ou 5 : mais s'il est 3, le nombre est multiple de 3 ; d'ailleurs le reste 5 équivaut à -1 (*) ;

(*) On peut prendre le quotient par excès ou par défaut ; ainsi pour $\frac{25}{7}$, le quotient est 3 ou 4, en sorte que $25 = 3 \times 7 + 4$ ou $= 4 \times 7 - 3$; le reste est donc 4 ou -3 ; c'est dans ce sens qu'il faut entendre les restes précédés du signe $-$.

(**) On dit algébriquement que tout nombre premier (excepté 2 et 3) est de la forme $6n \pm 1$, mais la réciproque n'est pas vraie ; on n'a pu réussir encore à trouver une formule propre à n'exprimer que les nombres premiers et à les renfermer tous.

donc tout nombre qui n'est divisible par 2, ni par 3, doit différer de 1, d'un multiple de 6.

27. Pour décomposer un nombre donné, non premier, en ses facteurs premiers, on le divisera d'abord par 2, autant de fois consécutives que cela sera possible ; posons qu'il soit divisible 3 fois : alors ce nombre sera le produit de $2 \times 2 \times 2$ ou 2^3, par le quotient qu'on aura obtenu. On essaiera ensuite la division de ce quotient par 3 ; posons qu'elle puisse s'effectuer 2 fois : ce quotient sera le produit de 3^2 par un nouveau quotient, de sorte que le nombre proposé sera à son tour le produit de ce dernier par $2^3 \times 3^2$. On continuera ainsi à éprouver tous les nombres premiers 5, 7, 11, 13 . . . et le nombre donné sera ainsi décomposé en ses facteurs premiers (*).

Par exemple, pour 360, on divisera par 2; puis le quotient 180 par 2, et enfin 90 par 2. Comme 45 n'est plus divisible par 2, on essaiera 3, puis on divisera le quotient 15 de nouveau par 3, et on aura le nombre premier 5 : ici l'opération est terminée, et on a . . . . $360 = 2^3.3^2.5$. On donne ordinairement au calcul la disposition ci-contre, afin d'en mieux distinguer les facteurs. On trouve de même $210 = 2.3.5.7$.

360	2	210	2
180	2	105	3
90	2	35	5
45	3	7	7
15	3		
5	5		

On a souvent besoin de trouver tous les diviseurs d'un nombre donné : on le décomposera d'abord en ses facteurs simples ; puis on les multipliera 2 à 2, 3 à 3, . . . En

(*) Soient α β ... les diviseurs premiers d'un nombre N, m n p le nombre de fois que chacun est facteur, on a $N = \alpha^m . \beta^n . \gamma^p \ldots$. Pour trouver tous les diviseurs de N, on prendra tous les termes du produit.

$(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^m)(1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^n)(1 + \gamma + \ldots + \gamma^p) \ldots$

Le nombre de tous ces diviseurs est $(m + 1)(n + 1)(p + 1)$.

formant toutes les combinaisons possibles, on sera sûr de n'omettre aucun facteur (c'est ce qui sera démontré n°. 33) : pour cela on opérera ainsi qu'il suit. Comme $360 = 2^3 . 3^2 . 5$, on formera le produit . . . . . $(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \times (1 + 3 + 3^2)$. Après cela on multipliera de même chacun des termes par $1 + 5$ et on aura tous les diviseurs cherchés qui sont

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

pour 210, on a $(1 + 2)(1 + 3)(1 + 5)(1 + 7)$, d'où 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 70, 42, 105, 210.

28. Il arrive quelquefois qu'on essaie la division par les divers nombres premiers 2, 3, 5, 7 . . . sans en rencontrer aucun qui divise exactement. Lorsqu'on a poussé l'épreuve jusqu'à diviser le nombre par sa racine carrée, il est inutile d'aller au-delà, et ce nombre est nécessairement premier. Car puisque toute quantité est le produit de sa racine carrée par elle-même ; si on fait croître un des facteurs, l'autre doit décroître, pour que le produit soit toujours le nombre proposé : cela prouve que lorsqu'il y a un diviseur plus grand que la racine, il y en a aussi un plus petit.

Par exemple, 127 est un nombre premier, car il n'est divisible par aucun des nombres 2, 3, . . . jusqu'à 11, et que $\sqrt{127}$ est entre 11 et 12 ; de même 477 peut être divisé deux fois par 3, et on a $477 = 3^2 . 53$, mais 53 n'est divisible par 2, 3, 5, ni 7 ; donc 53 est premier et 477 ne peut être ultérieurement décomposé.

On consultera sur les propriétés des nombres les beaux mémoires d'*Euler*, *Lagrange*, . . . Dans les collections de Turin, Berlin, Paris et Pétersbourg ; la Théorie des nombres de *Legendre* ; les Recherches arithmétiques de *Gauss* (traduites par *Poulet de Lisle*).

CHAPITRE II.

DES NOMBRES FRACTIONNAIRES.

1. *Nature et transformation des Fractions.*

29. Si on divise l'unité en parties égales, et si on prend seulement une ou plusieurs de ces parties, on aura une *Fraction;* elle doit être exprimée par deux nombres, l'un qu'on nomme *Dénominateur*, marque en combien de parties l'unité est divisée, l'autre qui est le *Numérateur*, indique combien on prend de ces parties. On entend par cinq septièmes qu'on a partagé l'unité en 7 quantités égales et qu'on en a pris 5, ce qu'on écrit ainsi, $\frac{5}{7}$; 5 est le Numérateur, 7 le Dénominateur. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ s'énoncent une demie, 2 tiers, 3 quarts, 5 huitièmes.

30. Pour multiplier $\frac{5}{7}$ par 7, il faut ajouter 7 fois chaque 7e, et comme chacun produit l'unité, on a $\frac{5}{7}\times 7=5$: donc *toute fraction multipliée par son dénominateur produit le numérateur.* C'est pource la qu'on emploie le même signe pour la division et pour les fractions : car cinq septièmes étant le quotient de 5 divisé par 7, *une fraction n'est autre chose que le quotient de la division de son numérateur par son dénominateur* (5).

Le quotient de 47 divisé par 7 est donc $6+\frac{5}{7}$ puisqu'en multipliant par 7 on a $42 + 5 = 47$. Donc *si au quotient entier d'une division, on ajoute une fraction qui ait le reste pour numérateur et le diviseur pour dénomi-*

nateur, on aura le quotient exact : $\frac{72312146}{8369}$ donne 8640 pour quotient et 3986 pour reste ; ainsi le quotient exact est $8640 + \frac{3986}{8369}$.

Donc 1°. si le dénominateur et le numérateur sont égaux, la fraction vaut l'unité, ce qui est d'ailleurs visible d'après la définition ; $\frac{11}{11} = \frac{12}{12} = 1$.

2°. Si le numérateur surpasse le dénominateur, la fraction est plus grande que l'unité ; on l'appelle un *nombre fractionnaire*, pour la distinguer des autres fractions qu'on regarde comme < 1. *On extrait les entiers en divisant le numérateur par le dénominateur* ; 37 cinquièmes $= \frac{37}{5}$, ou 7 et $\frac{2}{5}$. Cela résulte aussi de ce que la fraction contient autant d'unités, qu'on prend de fois 5 parties.

Réciproquement il est facile de convertir les entiers en fractions ; pour réduire 7 en cinquièmes, on multiplie 7 par 5 et on a $\frac{35}{5}$, d'où $7 + \frac{2}{5} = \frac{37}{5}$.

31. Lorsqu'on augmente le numérateur seul, la fraction croît, puisqu'on prend plus de parties et que leur grandeur est restée la même. Par la raison contraire, si on augmente le dénominateur, sans changer le numérateur, la fraction doit diminuer. Il sera donc bien aisé dans certains cas de reconnoître la plus grande des deux fractions ; $\frac{5}{7} > \frac{4}{7}$, $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$, $\frac{4}{5} > \frac{3}{7}$.

D'après cela, il est aisé de prévoir qu'on peut augmenter les deux termes d'une fraction, sans en changer la valeur, et voici comment. Soit $\frac{5}{7}$; si on double le dénominateur 7, chacune des parties que désigne notre fraction sera elle-même divisée en deux ; pour avoir la même grandeur exprimée en 14es., il faut donc prendre 2 parties au lieu d'une ; 4 au lieu de 2 ; enfin 10 au lieu de 5 ; $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$. En triplant 7, on verroit de même qu'il faut tripler 5 ;... Donc *on ne change pas la valeur d'une fraction,*

lorsqu'on en multiplie, et par conséquent lorsqu'on en divise les deux termes par un même nombre.

2. *Réduction au même Dénominateur.*

32. Il est maintenant aisé de reconnoître la plus grande de deux fractions données : il suffira de les *réduire au même dénominateur en multipliant les deux termes de la première par le dénominateur de la seconde, et réciproquement* ; cette opération ne change pas la valeur des fractions, et chacune a pour dénominateur le produit des deux dénominateurs ; ainsi $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{7}$ équivalent à $\frac{3.7}{4.7}$ et $\frac{5.4}{7.4}$, ou $\frac{21}{28}$ et $\frac{20}{28}$; donc $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$.

Le même raisonnement prouvera que si on a plus de deux fractions, *en multipliant les deux termes de chacune par le produit des autres dénominateurs, on les réduira à un dénominateur commun*, qui sera le produit de tous les dénominateurs. Soient $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ et $\frac{3}{4}$; on multipliera les deux termes de la fraction $\frac{2}{3}$ par 4×7 ou 28 ; ceux de $\frac{5}{7}$ par 3×4 ou 12 ; enfin ceux de $\frac{3}{4}$ par 3×7 ou 21 : on aura $\frac{56}{84}$ $\frac{60}{84}$ et $\frac{63}{84}$. donc $\frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4}$.

On pourroit de même juger des grandeurs relatives de plusieurs fractions en les réduisant au même numérateur, ce qui ne présente aucune difficulté.

33. Soient deux fractions quelconques $\frac{7}{11}$ et $\frac{35}{55}$; après la réduction au même dénominateur, on jugera qu'elles sont égales ou inégales, suivant que les produits en croix 7×55 et 11×35, qui servent de numérateurs, sont eux-mêmes égaux ou inégaux. Si donc on a deux produits égaux $35 \times 11 = 7 \times 55$, on pourra en composer des fractions égales $\frac{35}{55} = \frac{7}{11}$.

D'après cela, prenons deux fractions égales, telles que $\frac{7}{11}$ et $\frac{35}{55}$, d'où $35 \times 11 = 7 \times 55$; retranchons de

part et d'autre 7×11, nous aurons . . . .

$(35-7) \times 11 = (55-11) \times 7$; donc $\frac{35-7}{55-11}$ ou $\frac{28}{44} = \frac{7}{11}$.

Ainsi *lorsque deux fractions sont égales, celle qu'on forme avec la différence (ou la somme) de leurs numérateurs et celle de leurs dénominateurs, leur est encore égale.*

Supposons que $\frac{7}{11}$ soit *Irréductible*, en sorte qu'aucune fraction égale ne puisse être exprimée en nombres plus petits. En faisant la même opération sur $\frac{30}{47}$ supposé $= \frac{7}{11}$, on aura $\frac{7}{11} = \frac{23}{36} = \frac{16}{25} = \ldots$ Poussons ce calcul, s'il se peut, jusqu'à rendre le numérateur < 7; le dénominateur sera < 11, puisque (31) le résultat $\frac{2}{3}$ est toujours $= \frac{7}{11}$; on auroit donc la fraction $\frac{2}{3}$ de même valeur que $\frac{7}{11}$ et exprimée en de moindres termes, ce qui est contre l'hypothèse. Cette soustraction successive devra donc amener la fraction proposée à avoir 7 et 11 pour ses deux termes, ainsi ils étoient des multiples de 7 et 11. Donc *de deux fractions égales, si l'une est irréductible, les deux termes de l'autre sont des multiples de ceux de la première.*

Concluons de là que 1°. si un produit 35×11 est divisible par un nombre premier, l'un des facteurs au moins est divisible par 7, car $\frac{35 \times 11}{7} = 55$, donne. . .
$35 \times 11 = 55 \times 7$ et $\frac{35}{55} = \frac{7}{11}$; si $\frac{7}{11}$ est irréductible, 35 et 55 sont des multiples de 7 et 11 respectivement.

2°. Le produit de deux nombres premiers ne peut admettre d'autres diviseurs que ces nombres, l'unité et le produit même.

3°. Tout nombre n'a qu'une manière d'être composé de facteurs simples. (*Voy.* n°. 27.)

4°. Si un diviseur, tel que 14, n'est pas premier; il faut que l'un des facteurs du multiple de 14 soit divi-

sible par 2 et un autre par 7, ou que ce facteur soit divisible par 14. Ainsi 8×35 et 70×15 sont des multiples de 14; 8 l'est de 2, 35 l'est de 7 et 70 de 14.

5°. Si 7 et 11 n'ont aucuns facteurs communs, ce qu'on exprime en disant que ces nombres sont *Premiers entre eux*, deux puissances quelconques de 7 et de 11, telles que 7^3 et 11^4, sont aussi premières entre elles, puisque si elles avoient un diviseur commun, il le seroit aussi de 7 et de 11.

34. Le calcul de la réduction de plusieurs fractions au même dénominateur s'abrège beaucoup lorsque ces dénominateurs ne sont pas premiers entre eux; soient, par exemple, ... $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{12}$.

Supposons qu'on connoisse le nombre 24 qui est divisible par tous les dénominateurs; en faisant ces divisions, on aura pour quotiens. . 12 8 6 4 3 2

Et multipliant les deux termes de chaque fraction par le quotient correspondant, on a . . . $\frac{12}{24}$ $\frac{16}{24}$ $\frac{18}{24}$ $\frac{4}{24}$ $\frac{9}{24}$ $\frac{10}{24}$.

Au lieu de 24 on auroit pu employer 72, 48 . . . mais on doit préférer 24 qui est le plus petit nombre divisible par tous les dénominateurs.

Il reste maintenant à savoir trouver ce nombre 24: or il est clair qu'il suffit de chercher le plus petit nombre divisible par 12 et 8, sans avoir égard aux autres dénominateurs 2, 3, 4 et 6 qui divisent 12; en effet, tout nombre divisible par 12, le sera aussi par 2, 3, 4 et 6. De même on pourra remplacer 12 par 3, en supprimant le facteur 4 qui existe dans 8: il ne sera plus question que d'obtenir le plus petit nombre divisible par 3 et 8, qui est 3×8 ou 24. *Pour trouver le plus petit nombre divisible par des quantités données, on cherchera leurs facteurs simples* (27), *puis prenant pour chacun d'eux la puissance la plus élevée, on fera leur produit.*

De même pour 2, 3, 5, 10, 15, 8, 14, 12 et 6, on ne s'occupera que de 10, 15, 8 et 12, ou 2.5, 3.5 2^3.

et $2^2.3$; on en tirera $3.5.2^3$ ou 120 pour le plus petit nombre divisible par les quantités proposées.

3. *Réduction à la plus simple expression.*

35. Il y a une infinité de fractions qui ont même valeur quoiqu'exprimées en nombres différens, et comme il est plus aisé de se faire une idée juste de la grandeur d'une fraction, lorsqu'elle est exprimée en de moindres termes, il convient de la réduire à son expression la plus simple. Pour cela on pourroit essayer la division des deux termes par les nombres 2, 3, 5 . . .; par exemple, en divisant $\frac{210}{315}$ haut et bas par 5, on a $\frac{42}{63}$, puis par 3, il vient $\frac{14}{21}$; enfin par 7 on a $\frac{2}{3} = \frac{210}{315}$.

Mais ce procédé n'est qu'un tâtonnement; d'ailleurs si la fraction étoit irréductible on ne le reconnoîtroit qu'après des essais longs et fastidieux. Il est donc préférable de chercher de suite le plus grand des nombres qui puisse diviser les deux termes de la fraction; car il suffira d'exécuter cette double division et on aura la plus simple expression demandée.

Soient proposées deux quantités, telles que 294 et 91. Si 91 divise 294, il est visible que 91 est le nombre cherché : on essaiera donc cette division. Mais on trouve le reste 21 et le quotient 3; de sorte que $294 = 91 \times 3 + 21$. Or, il est clair que tout nombre qui seroit diviseur exact des deux nombres 91 et 21, devroit aussi diviser le troisième 294; car en divisant toute l'équation par 7, on aura $\frac{294}{7} = \frac{91 \times 3}{7} + \frac{21}{7}$; or le second membre est entier, d'où il suit que $\frac{294}{7}$ doit aussi l'être. De même si 7 divisoit 294 et 91, comme $\frac{21}{7}$ ajouté à l'entier $\frac{91 \times 3}{7}$, doit

donner l'entier $\frac{294}{7}$, on voit que $\frac{21}{7}$ doit être entier.

Concluons de là que tout diviseur commun à 294 et 91 doit diviser 21 et 91, et réciproquement : de sorte que 21 et 91 ont tous les mêmes diviseurs communs que 294 et 91, et n'en ont pas d'autres ; et par conséquent le plus grand diviseur commun cherché est celui de 91 et 21.

La question est maintenant plus simple, puisque 21 est $<$ 294 et qu'il ne s'agit plus que de trouver le plus grand commun diviseur entre 21 et 91. En raisonnant de même on verra qu'il est 21, si 21 divise 91 ; ou plutôt qu'il est le même que celui qui existe entre 21 et le reste 7 de la division de 91 par 21. Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à un diviseur exact, qui sera le nombre cherché. On trouve ici 7, car 21 est divisible par 7 ; ainsi pour réduire la fraction $\frac{91}{294}$ à sa plus simple expression, on divisera les deux termes par 7, et on aura $\frac{13}{42}$.

$$294 \left\{ \frac{91}{3} \left\{ \frac{21}{4} \left\{ \frac{7}{3} \right.\right.\right.$$

Donc *pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres, divisez le plus grand par l'autre ; rendez ensuite le reste diviseur, et le diviseur, dividende ; puis continuez de la sorte jusqu'à ce que vous trouviez un diviseur exact ; ce sera le plus grand commun diviseur cherché.*

On écrit ordinairement chaque reste à la droite du diviseur, afin qu'il occupe sur-le-champ la place propre à la division subséquente. C'est ce qu'on voit dans l'exemple précédent et dans le suivant, où on trouve 47 pour le plus grand commun diviseur des deux termes de la fraction $\frac{799}{2961}$, qui se réduit à $\frac{17}{63}$.

2961	799	564	235	94	47
	3	1	2	2	2
63	17	12	5	2	1

36. Il résulte de ce que nous avons dit que

1°. Pour obtenir tous les diviseurs communs entre deux nombres, il suffit de chercher tous les facteurs (27) de leur plus grand commun diviseur. Ainsi celui de 150 et 90 étant 30; on a 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30 pour facteurs de 30 et pour seuls diviseurs de 150 et 90.

2°. Nous avons dit que notre calcul doit conduire enfin à un quotient exact; on voit, qu'en effet, les restes diminuant sans cesse, on devra arriver, au moins, à l'unité qui est diviseur de tous les nombres. Ainsi 21 et 50 ont l'unité pour plus grand commun diviseur; et deux termes de la fraction $\frac{21}{50}$ étant premiers entre eux, cette fraction est irréductible. Il est fâcheux de ne pouvoir reconnoître ce cas, qu'après avoir fait tous les frais de calcul pour s'en assurer (49).

3°. Le plus grand commun diviseur de deux nombres devant diviser chacun des restes, si dans le cours de l'opération on obtient pour reste un nombre premier qui ne divise pas exactement le précédent reste, il est inutile de pousser plus loin le calcul qui ne doit se terminer qu'à l'unité.

4°. Puisque dans l'exemple précédent 47 divise non-seulement 2961 et 799, mais encore 564, 235 et 94, cherchons combien de fois 47 est contenu dans chacun de ces nombres. Il l'est visiblement 1 fois dans 47 et 2 fois dans 94 : on posera 2 et 1 sous 94 et 47. On a $235 = 2 \times 94 + 47$, d'où $\frac{235}{47} = 2 \times 2 + 1 = 5$, qu'on posera sous 235. De même pour avoir le quotient de 564 par 47, on multipliera le 5 qu'on vient d'obtenir, par le quotient 2 qui est au-dessus, et on ajoutera le 2 qui est à la droite du 5; $2 \times 5 + 2 = 12$, qu'on posera sous 564. On aura enfin $12 \times 1 + 5 = 17$, $17 \times 3 + 12 = 63$. Ainsi

les nombres 63, 17, 12 . . . sont les quotiens de 2961, 799 . . . divisés par 47.

On peut voir que ce procédé sert également à trouver la valeur $\frac{17}{63}$ de la plus simple expression de $\frac{799}{2961}$, et que même il est plus court d'opérer de la sorte dans cet exemple, que de diviser les deux termes par 47. Nous mettrons ici deux calculs semblables : pour $\frac{69}{115}$ et $\frac{204}{1139}$ qu'on réduit à $\frac{3}{5}$ et $\frac{12}{67}$.

115	69	46	23
	1	1	2
5	3	2	1

1139	204	119	85	34	17
	5	1	1	2	2
67	12	7	5	2	1

On pourra encore s'exercer à reconnoître que la fraction $\frac{202924}{293215}$ est irréductible ; que $\frac{840}{1848}=\frac{5}{11}$, $\frac{3661}{11506}=\frac{7}{22}$ et $\frac{14349}{38264}=\frac{3}{8}$.

5°. Pour obtenir le plus grand commun diviseur entre les trois nombres 150, 90 et 40, on cherchera d'abord celui de 150 et 90 qui est 30 ; puis celui de 30 et de 40, qui est 10 ; 10 est le nombre cherché. 150, 90 et 40 n'ont donc d'autres diviseurs que 1, 2, 5 et 10. Le même procédé donnera tous les diviseurs communs à tant de nombres qu'on voudra.

4. *Addition et Soustraction.*

37. Rien n'est plus aisé que d'ajouter ou soustraire des fractions qui ont même dénominateur, on ajoute ou soustrait simplement les numérateurs. Ainsi . . . $\frac{7}{12}+\frac{2}{12}=\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{12}-\frac{3}{12}=\frac{4}{12}$ ou $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}-\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$.

Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les ramener à cet état (32) ; ainsi . . . . $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}=\frac{21}{28}+\frac{20}{28}=\frac{41}{28}=1+\frac{13}{28}$. De même $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{3}{4}$ se réduit à $\frac{56}{84}+\frac{60}{84}+\frac{63}{84}=2+\frac{11}{84}$. Enfin pour . . . .

$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}$, on aura (34) $\frac{60+80+72+84+56+100-45-30-50}{120}=\frac{327}{120}=2+\frac{29}{40}$.

Lorsque les fractions proposées sont accompagnées d'entiers, on opère séparément sur ceux-ci. Pour ajouter $3+\frac{1}{2}$ avec $5+\frac{3}{4}$, on ajoute $\frac{1}{2}$ avec $\frac{3}{4}$, et on a $\frac{5}{4}$; on pose $\frac{1}{4}$, et on retient 1, qu'on joint à 3 et à 5 : on a $9+\frac{1}{4}$.

De même $3+\frac{1}{2}-(1+\frac{1}{4})$ se trouve en ôtant $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$ puis 1 de 3; on trouve pour reste $2+\frac{1}{4}$. Soit aussi . . . . $3+\frac{1}{2}-(1+\frac{3}{4})$; comme $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$ ne se peut, on ajoute 1 à $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$, et on a $\frac{6}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$: mais ensuite il faut aussi ajouter 1 au nombre à soustraire ; on dit donc $3-2=1$; $1\frac{3}{4}$ est la différence demandée.

5. *Multiplication et Division.*

38. Pour multiplier $\frac{3}{4}$ par 5, il faut ajouter 5 fois $\frac{3}{4}$; on multipliera donc le numérateur 5 par 3, et on aura $\frac{15}{4}$. Ainsi, pour *multiplier une fraction par un nombre entier, on multipliera le numérateur par ce nombre.* On peut aussi diviser le dénominateur par l'entier, lorsque le premier est un multiple du second ; car $\frac{3}{4}\times 2=\frac{3\times 2}{4}$; on peut supprimer le facteur commun 2 ce qui donne $\frac{3}{2}$, comme si on eût divisé 4 par 2. On a de même . . . . $\frac{11}{18}\times 36=\frac{11}{1}\times 2=22$; $\frac{19}{24}\times 12=\frac{19}{2}$.

39. Pour diviser $\frac{3}{4}$ par 5, il faut chercher une fraction dont le dénominateur divisé par 5, donne $\frac{3}{4}$; ainsi en introduisant le facteur 5 au dénominateur, le quotient cherché sera $\frac{3}{4\times 5}$ ou $\frac{3}{20}$. *Pour diviser une fraction par un nombre entier, on multipliera le dénominateur par ce nombre.* On peut aussi diviser le numérateur par l'entier, lorsqu'il en est un multiple ; car $\frac{15}{11}:5=\frac{15}{11\times 5}$ d'après notre règle ;

et ôtant le facteur 5 commun aux deux termes on a $\frac{3}{11}$.

40. Le produit de $\frac{5}{7}$ par $\frac{12}{4}$ ou 3 est $\frac{3\times 5}{7}$, d'après ce qu'on a vu; mais si on multiplie par 4 les deux termes de ce résultat, on a $\frac{12\times 5}{4\times 7}$ pour produit, c'est-à-dire, qu'on a multiplié entre eux les numérateurs des facteurs $\frac{5}{7}$ et $\frac{12}{4}$, et de même pour les dénominateurs.

La définition (3) de la multiplication ne peut visiblement s'appliquer aux fractions; ce seroit, par exemple, dire une chose entièrement vide de sens, si on avançoit que multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, ce soit *ajouter* $\frac{3}{4}$ *autant de fois que l'unité est contenue dans* $\frac{5}{7}$. Il résulte de là qu'on doit donner au mot *multiplier*, lorsqu'il s'agit des fractions, une nouvelle acception. Nous conviendrons à l'avenir de l'entendre de cette manière : multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, c'est *prendre les* $\frac{3}{4}$ *de la grandeur désignée par* $\frac{5}{7}$.

Pour exécuter ce calcul, il faudra donc former 4 parts égales dans la quantité $\frac{5}{7}$, puis en prendre 3; ou diviser $\frac{5}{7}$ par 4 et multiplier ensuite par 3 : or nous avons vu que $\frac{5}{7} : 4 = \frac{5}{7\times 4}$, et que $\frac{5}{7\times 4}\times 3 = \frac{5\times 3}{7\times 4}$; c'est le produit demandé ou la *fraction de fraction* cherchée : les $\frac{3}{4}$ des $\frac{5}{7}$ de l'unité $= \frac{15}{28} = \frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$.

Il est facile de voir que notre nouvelle définition du mot *multiplier*, non-seulement n'implique pas contradiction avec l'ancienne, mais même qu'elle n'est qu'une extension qu'on donne à celle-ci : car en comparant les produits $\frac{5}{7}\times\frac{12}{4}$ et $\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}$, on reconnoît bientôt que le procédé de calcul est le même. Ainsi pour $\frac{16}{7}\times\frac{15}{4}$, il faudra multiplier $\frac{16}{7}$ par 3, puis par $\frac{3}{4}$, ce qui donne. . . . $\frac{16\times 12}{7\times 4}+\frac{16\times 3}{7\times 4}$ ou $\frac{16\times 15}{7\times 4}$; on voit donc que nous avons

seulement introduit une modification qui conduit à des procédés uniformes et applicables à tous les cas.

Concluons de là que 1°. *pour multiplier deux fractions, il faut diviser le produit des numérateurs par celui des dénominateurs.*

2°. le produit est plus petit que chaque facteur, lorsqu'il sont moindres que l'unité.

3°. On peut intervertir l'ordre des facteurs comme pour les entiers (11); les $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4}$ équivalent aux $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$.

4°. Pour avoir les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ des $\frac{5}{6}$ des $\frac{4}{5}$ de l'unité, il faut évaluer le produit $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2.3.5.4}{3.4.6.5}$ qui se réduit à $\frac{1}{3}$.

41. Lorsqu'il y a des entiers joints aux fractions, on les convertit en nombres fractionnaires (30, 2°) : ainsi . . .

$$3\tfrac{2}{9} \times 7\tfrac{1}{3} = \tfrac{29}{9} \times \tfrac{22}{3} = \tfrac{638}{27} = 23\tfrac{17}{27};$$
$$45\tfrac{3}{4} \times 17\tfrac{2}{3} = \tfrac{183}{4} \times \tfrac{53}{3} = \tfrac{9699}{12} = 808\tfrac{1}{4}.$$

Mais il est souvent plus court d'exécuter séparément la multiplication de chaque partie et d'ajouter. Pour $3\frac{1}{4} \times 8$, on multiplie d'abord 3 par 8, et on a 24; puis $\frac{1}{4}$ par 8 et on a 2, d'où $3\frac{1}{4} \times 8 = 24 + 2 = 26$. De même, pour l'exemple ci-contre, où, après avoir fait le produit des entiers 45×17 et des fractions $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$, on multiplie en outre chaque entier par la fraction qui accompagne l'autre facteur.

$$\begin{array}{r} 45\ \ \tfrac{3}{4} \\ 17.\ \tfrac{2}{3} \\ \hline 315\quad \\ 45\quad\ \ \\ \tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{3} \ldots\ldots \tfrac{1}{2} \\ 45 \times \tfrac{2}{3} \ldots 30\quad \\ 17 \times \tfrac{3}{4} \ldots 12 \ldots \tfrac{3}{4} \\ \hline 808 \ldots \tfrac{1}{4} \end{array}$$

42. Pour diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, il faut trouver une fraction qui, multipliée par $\frac{5}{7}$, donne $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire, dont le numérateur divisé par 7, et le dénominateur divisé par 5, donne $\frac{3}{4}$. Il est visible qu'il suffit d'introduire dans $\frac{3}{4}$ les facteurs 7 et 5, l'un en haut, l'autre en bas; ainsi $\frac{3.7}{4.5}$, ou $\frac{21}{20}$ est le quotient.

Donc *pour diviser par une fraction on la renverse et on multiplie* $8 : \frac{3}{5} = 8 \times \frac{5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.... $\frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{5} = \frac{33}{20}$. Le quotient est d'ailleurs plus grand que le dividende quand le diviseur est moindre que l'unité.

Il ne faut pas négliger de supprimer les facteurs communs quand on en trouve, $\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = 2 : 4 = \frac{1}{2}$; $\frac{18}{19} : \frac{9}{38} = \frac{2}{1} : \frac{1}{2} = 4$.

Lorsqu'il y a des entiers joints aux fractions, on les réduit en nombres fractionnaires ; ainsi $2\frac{1}{3} : 4\frac{3}{4} = \frac{7}{3} : \frac{19}{4} = \frac{28}{57}$. On peut aussi chasser le dénominateur du diviseur, en multipliant les deux quantités données par ce dénominateur. $2\frac{1}{3} : 3\frac{5}{6}$, en multipliant par 6, revient à $14 : 23$ ou $\frac{14}{23}$.

6. *Des fractions décimales.*

43. L'embarras qu'entraînent dans les calculs les deux termes des fractions, a inspiré l'idée de fixer d'avance le dénominateur et de le sousentendre, ce qui donne lieu à deux sortes de dispositions, les fractions décimales et les nombres complexes. Mais l'une et l'autre sont assujéties aux règles données précédemment, qui seulement deviennent plus simples. Occupons-nous d'abord des fractions décimales.

On a vu (6) qu'un chiffre vaut dix fois moins que s'il occupoit la place à sa gauche; si donc on continue à la droite des unités la même convention, en marquant le rang de celles-ci par une virgule, on verra que le premier chiffre, après les unités, sera des dixièmes; 3, 3 signifie 3 entiers $\frac{3}{10}$: le second sera des centièmes; $42{,}05 = 42\frac{5}{100}$: le troisième sera des millièmes $0{,}403 = \frac{403}{1000}$: etc.

La partie qui suit la virgule est donc le numérateur, et il est inutile d'écrire le denominateur qui est toujours 1 suivi d'autant de zéros qu'il y a de décimales ou de chiffres après la virgule. Il est donc bien facile d'énoncer une

fraction décimale : 8,700 201 = 8 + 700 201 millionnièmes ; 354,0063 = 354 + 63 dix-millièmes ;.....

Réciproquement, pour écrire une fraction décimale dont on a l'énoncé, on écrira le numérateur donné, puis on placera la virgule de sorte qu'il y ait autant de chiffres décimaux, qu'il y a de zéros dans le dénominateur qu'on sousentend. Trois dix-millièmes s'écrit 0,0003 ; mille entiers et 4 centièmes = 1000,04 ; 13 mille cent millionnièmes . . . . . . = 0,00013000 ;.....

44. On remarquera que 1°. en déplaçant la virgule, suivant qu'on la recule vers la droite ou la gauche, on multiplie ou divise le nombre, par 10 pour un rang ; par 100 pour 2 ; par 1000 pour 3 ; etc.... parce que chaque chiffre désigne un nombre qui lui-même est multiplié ou divisé par 10, 100, 1000,..... ainsi, 342,53 est 10 fois 34,253 ; 100 fois 3,4253 ; 1000 fois 0,34253 ; etc.....

2°. *On peut sans changer la valeur d'une fraction décimale, mettre un ou plusieurs zéros à sa droite, ou les en ôter* ; 0,3 = 0,30 = 0,300 = ... car on multiplie alors les deux termes de la fraction par 10, 100, 1000 ; .... en effet, au lieu de $\frac{3}{10}$, on écrit $\frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000} + ...$

3°. Deux fractions décimales, qui ont le même nombre de chiffres, ont même dénominateur : en sorte que, lorsqu'il est différent, il devient le même en complétant par des zéros le nombre de décimales.

4°. La grandeur d'une fraction décimale ne dépend pas du nombre de chiffres qui l'expriment, mais de la valeur du chiffre qui suit la virgule. Ainsi, 0,7 > 0,54321 ; 0,001 > 0,00078 ; 0,687 > 0,679.

Voyons maintenant ce que deviennent nos règles générales (37 à 42).

45. Pour ajouter plusieurs quantités décimales, on écrit les nombres l'un sous l'autre en plaçant les virgules dans

une même colonne verticale ; on ajoute à l'ordinaire et on place dans la somme la virgule au même rang. L'exemple ci-contre suffit pour faire concevoir cette règle ; on voit que par là les fractions sont réduites au même dénominateur, puisqu'on est supposé avoir complété par des zéros les nombres de décimales.

4852,791
4,00745
2,7
0,049
4859,54745

La soustraction exige la même disposition ; on soustrait à l'ordinaire ; en voici quelques exemples.

57,02	4,8274	6,00435	3,842
48,1	2,0139	0,17	1,004554
8,92	2,8135	5,83435	2,837446

46. Pour multiplier deux quantités décimales, telles que 43,7 et 3,91 ; comme elles équivalent à $\frac{437}{10}$ et $\frac{391}{100}$, on cherchera 437 × 391 ; mais ce produit des numérateurs doit être divisé par celui des dénominateurs 1000 ; *on voit donc que pour obtenir le produit de deux nombres décimaux : on multipliera les deux quantités proposées, sans avoir égard à la virgule ; on séparera ensuite par une virgule autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs.* Le produit est ici 170,867. En voici divers autres exemples (*).

2,4542	3,7	21,32	0,04
0,0053	4,1 2	0,1001 03	0,007
7 3626	7 4	63 96	0,00028
122 710	37	2132	
0,0130 0726	148	2 132	
	15,244	2,134 195 96	

47. Pour la division des décimales, on en complète le nombre par des zéros, et on supprime la virgule (21, 6°) :

(*) On pourroit exécuter la multiplication en commençant par

par là, le dividende et le diviseur sont multipliés par un même nombre, ce qui ne change pas le quotient. Soit

---

le chiffre de l'ordre le plus élevé dans le multiplicateur, alors chacun des produits partiels devroit être avancé d'un rang vers la droite. Ce procédé ne diffère de celui qu'on a donné (15) qu'en ce que la première ligne est écrite la dernière, la seconde l'avant-dernière...... Par là on a l'avantage de connoître d'abord les chiffres qui ont la plus grande valeur, et qui suffisent quelquefois.

```
   934 528
    34 277
----------
2 803 584
  373 811 2
   18 690 56
    6 541 696
      654 1696
--------------
 3203 281 6256
```

Soit demandé le produit 93,4528 × 3,4277 avec 5 décimales. On remarquera que le multiplicateur ayant 5 chiffres, les unités répondront à la 5e. colonne du produit, ainsi la virgule sera placée entre le 4e. et le 5e chiffre, comme on l'a marqué ci-contre par un trait; une fois la place de la virgule déterminée, on multipliera 934528 par 3 et 4; les unités 2 de ce dernier produit seront dans le 5e. rang de décimales.

```
      ...
  93|4528
   3|4277
----------
 280|3584
  37|38112
   1|86905
     65416
      6541
----------
 320,32814
```

En commençant la multiplication par 2, on ne posera pas le 6 provenu de $2 \times 8 = 16$, et on retiendra 1, qu'on joindra au produit $2 \times 2 = 4$; on posera donc 5 sous le 2; puis $2 \times 5 = 10$, etc

La multiplication par 7 ne commencera qu'au chiffre 2 des dixaines, $2 \times 7 = 14$; on retiendra 1 sans poser 4, puis on dira $7 \times 5 = 35$; $35 + 1 = 36$, on posera 6 sous le 5; puis $4 \times 7 = 28$, etc.

Et ainsi de suite en supprimant à chaque opération un chiffre au multiplicande. On marquera par un point le chiffre supprimé.

Lorsque les facteurs ne sont qu'approchés, cette règle est sur-tout utile, car le procédé général auroit l'inconvénient d'alonger l'opération en donnant au produit un grand nombre de chiffres dont les derniers devroient être négligés, attendu qu'on n'y doit conserver que des parties décimales de même ordre que les facteurs.

La dernière décimale qu'on obtient par cette voie est fautive, parce qu'elle est influencée par la retenue de la colonne suivante, c'est pourquoi il faut chercher une décimale de plus, et négliger ensuite la dernière.

$\frac{8,445}{3,22}$, on écrit $\frac{8,445}{3,220}$ et on divise 8445 par 3220 ; le quotient est 2 et le reste 2005 ; ainsi $\frac{8,445}{3,22} = 2\frac{401}{644}$; de même $\frac{49,1}{20,074} = \frac{49,100}{20,074} = \frac{49100}{20074} = 2\frac{8952}{20074}$ (*).

Cette règle se simplifie, lorsque le diviseur n'a pas de chiffres décimaux ; on divise à part les entiers et les fractions ; ainsi $\frac{6,9345}{3} = 2,3115$. S'il y a plus de chiffres décimaux dans le dividende que dans le diviseur, on fait disparoître ceux de ce dernier nombre, en reculant la virgule d'autant de rangs vers la droite dans l'un et l'autre, ce qui ramène ce cas au précédent. . . . .

$$\frac{8,445}{3,22} = \frac{844,5}{322} = 2 + \frac{200,5}{322}.$$

7. *Des Approximations, des Périodes.*

48. Observons que l'erreur qu'on commet en négligeant le dernier chiffre d'une fraction décimale, est d'autant moindre qu'elle a plus de chiffres : ainsi lorsqu'on substitue 0,4 à 0,43, il y a $\frac{3}{100}$ d'erreur ; tandis que 0,04 pris pour 0,043 ne donne que $\frac{3}{1000}$ de moins. Il arrive souvent qu'on se contente de 2 ou 3 décimales, et qu'on néglige les autres, parce qu'il n'en résulte que des erreurs de peu d'importance : on a rarement besoin de plus de 6 décimales dans les calculs ordinaires.

(*) La division trouve une abréviation analogue. Pour $\frac{3203281}{34277}$, après avoir trouvé les deux premiers chiffres du quotient, on supprimera les unités 7 du diviseur ; on obtiendra ainsi le 3e. chiffre du quotient et le reste 1812 ; on supprimera de même les dizaines 7 du diviseur, et ainsi de suite. Il est facile d'appliquer ce procédé à la conversion des fractions en décimales.

```
3203281 { 34277
 118351 {------
  15520 { 934529
   1812
    102
     34
```

Si le résultat d'un calcul est 4,837123, on peut prendre 4,8 ou 4,83 ou 4,837... Alors la valeur est approchée à moins de $\frac{1}{10}$, de $\frac{1}{100}$, de $\frac{1}{1000}$,.... seulement pour diminuer l'erreur, autant que possible, *on met une unité de plus au dernier des chiffres conservés, lorsque le suivant surpasse* 4. Ici, on devra prendre 4,84 et non 4,83 à cause du 7 qui est aux millièmes.

49. Il arrive souvent que le résultat d'un calcul est une fraction irréductible compliquée : on se contente alors d'une approximation dont le degré dépend de la nature de la question. Ainsi au lieu de $\frac{427}{680}$, supposons qu'on demande une autre fraction plus simple, et qui en diffère de moins de $\frac{1}{8}$. Si on connoissoit deux fractions telles que $\frac{5}{8}$ et $\frac{6}{8}$, entre lesquelles la proposée fût comprise, et qui ayant 8 au dénominateur, ne différassent que de l'unité par leurs numérateurs, il est clair que ces fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{6}{8}$ rempliroient l'une et l'autre le but proposé, l'une approchée par défaut, l'autre par excès. Pour les obtenir, multiplions $\frac{427}{680}$ par 8; le produit $\frac{3416}{680}$ est compris entre 5 et 6, ainsi qu'on le voit en divisant 3416 par 680 : donc $\frac{427}{680}$ est entre $\frac{5}{8}$ et $\frac{6}{8}$, qui sont les fractions cherchées : en effet $\frac{5}{8}$ ne diffèrent de $\frac{427}{680}$ que de $\frac{2}{680}$ (*).

Appliquons ceci aux décimales. Proposons-nous d'approcher de $\frac{4}{7}$ à moins de $\frac{1}{10}$; on multipliera le numérateur 4 par 10, le quotient 0,5 est la valeur de $\frac{4}{7}$ approchée à moins de $\frac{1}{10}$. Si on eût voulu approcher à moins de

(*) En général, pour approcher à moins de $\frac{1}{q}$ de la valeur d'une fraction donnée $\frac{a}{b}$, on la multipliera par q, et on cherchera les entiers x et $x+1$, entre lesquels tombe le quotient $\frac{aq}{b}$; $\frac{x}{q}$ et $\frac{x+1}{q}$ seront les fractions cherchées.

$\frac{1}{100}$, on auroit multiplié 4 par 100, puis divisé 400 par 7, 0,57 auroit été le résultat cherché. En général, *il faut ajouter un zéro au reste de chaque division jusqu'à ce qu'on ait obtenu au quotient un chiffre, qui soit de même ordre que le degré d'approximation demandé.*

Ainsi, on a 3,5 ou 3,57 ou 3,571 ou 3,5714..... pour valeurs de $\frac{25}{7}$ approchées à moins de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,.... de même $\frac{147475}{362}$ donne 407 pour quotient entier et 141 pour reste; on ajoute un zéro à 141, et on divise 1410 par 362, on a le quotient 3 et le reste 324, de sorte que $\frac{147475}{362} = 407,3$ à moins de $\frac{1}{10}$. Ajoutant un zéro à 324, le quotient 8 de $\frac{3240}{362}$ donne 407,38 pour valeur approchée à moins de $\frac{1}{100}$, etc.

50. Lorsqu'après avoir ajouté un certain nombre de zéros, il arrive qu'on ne trouve aucun reste, la fraction est réduite exactement en décimales ; $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{3}{4} = 0,75$; $\frac{5}{8} = 0,625$; $\frac{13}{20} = 0,65$ en sont des exemples. Il est aisé de prévoir dans quel cas cela arrivera : car la division ne pouvant s'effectuer qu'après avoir multiplié le numérateur par 10, 100, 1000..... il faut que cette puissance de 10 soit divisible par le dénominateur, en supposant la fraction irréductible (33, 4°.) : et comme cette puissance n'a d'autres diviseurs premiers que 2 et 5, on voit qu'*une fraction irréductible n'est exactement convertible en décimales que lorsque le dénominateur est le produit de puissances de* 2 *et de* 5 *seulement*, quel que soit d'ailleurs le numérateur : le nombre de décimales est alors égal à la plus grande des puissances de 2 et 5 dans le dénominateur (*). S'il est $2^3.5^2$, il y aura trois chiffres décimaux.

(*) La forme générale des fractions convertibles exactement en décimales est $\frac{a}{2^m.5^n}$; le nombre des chiffres décimaux est égal au plus grand des exposans m et n.

51. Dans tout autre cas, une fraction ne peut être exprimée en décimales que par approximation. Mais comme les restes des divisions successives sont nécessairement moindres que le dénominateur, on ne tarde pas à retrouver l'un d'eux, ce qui donne le même quotient, puis le même reste qu'on a obtenu alors; et ainsi de suite : de sorte qu'on retrouve *périodiquement* les mêmes chiffres dans le même ordre.

C'est ainsi que $\frac{2}{3} = 0,666$ . . . $\frac{3}{11} = 0,27\ 27\ 27$ . . . $\frac{38}{111} = 0,342\ 342$ . . . . $\frac{4}{7} = 0,571428\ 571428$ . . . . $\frac{5}{6} = 0,8333$ . . . $\frac{7}{12} = 0,58333$. . . . Dans ces divers exemples la période a tantôt 1, 2, 3 ou 6 chiffres, et tantôt ne commence qu'au 2e ou 3e. rang après la virgule.

En général puisque les restes sont moindres que le diviseur, et que la période s'établit dès qu'on retrouve l'un des restes précédens, *elle est composée de moins de chiffres que le dénominateur ne renferme d'unités.* Consultez à ce sujet les *Rech. arith de Gauss*, n°. 312, où on trouvera plusieurs théorèmes nouveaux sur cette matière.

52. Il est facile de remonter d'une fraction décimale à sa génératrice : ainsi 0,75, écrit sous la forme $\frac{75}{100}$, se réduit à $\frac{3}{4}$. Mais lorsque la fraction décimale n'est qu'approchée, le problème a une infinité de solutions. C'est ainsi que 0,75 . . . 0,756 . . . 0,753 . . . 0,7512 . . . etc. répondent à des fractions à deux termes qui, réduites en décimales, ont 75 pour premiers chiffres.

Lorsque la fraction décimale est périodique il faut distinguer deux cas.

1°. Si la période commence dès la virgule, comme pour 0,6666 . . . 0,27 27 27 . . . : on remarquera que les fractions $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{99}$ $\frac{1}{999}$ . . . réduites en décimales donnent

0,1111 . . . 0,010101 . . . 0,001001 . . . on peut donc, par exemple, regarder 0,666 . . . comme le produit du premier résultat par 6 ; d'où $0,666\ldots = 6 \times \frac{1}{9} = \frac{6}{9}$ ou $\frac{2}{3}$. De même $0,2727\ldots = 27 \times 0,0101\ldots = \frac{27}{99}$ ou $\frac{3}{11}$. Donc *il faut diviser la période par le nombre qu'exprime* 9 *écrit successivement autant de fois que cette période a de chiffres.*

On trouvera que $0,342\ 342\ldots = \frac{342}{999} = \frac{38}{111}$; . . . $0,571428\ 571428\ldots = \frac{571428}{999999} = \frac{4}{7}$; $0,036\ 036\ldots = \frac{36}{999}$ ou $\frac{4}{111}$.

2°. Si la période ne commence pas dès la virgule, comme pour 0,58333 . . ., on peut regarder cette fraction comme $= 0,3333\ldots + 0,25$, ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. De même $0,21333\ldots = 0,333\ldots - 0,12$ ou $\frac{1}{3} - \frac{3}{25} = \frac{16}{75}$. Lorsqu'on a une fraction à deux termes à réduire en décimales, il est facile de prévoir si la période doit commencer dès la virgule ; car la fraction décimale est alors la somme ou la différence de deux autres, dont l'une a pour dénominateur le nombre 999 . . . et l'autre le produit de puissances de 2 et de 5. D'où on peut conclure que pour qu'une fraction à deux termes donne lieu au cas que nous examinons, il faut que son dénominateur admette entre autres facteurs une puissance de 2 ou de 5 : la plus grande de ces puissances marque le nombre des chiffres qui précèdent la période.

8. *De quelques autres fractions.*

53. Dans les sciences, les arts, le commerce, on emploie diverses sortes d'unités : il est nécessaire de les connoître et d'y savoir appliquer le calcul.

1°. L'unité de longueur se nomme *Mètre*, c'est la dix-millionnième partie de l'arc du méridien de Paris qui s'étend du pole à l'équateur.

2°. Un carré dont le côté a 10 mètres, et qu'on nomme *Are*, est l'unité de surface.

3°. Le poids d'un cube d'eau qui a pour côté le centième du mètre est l'unité de poids; c'est le *Gramme* (*).

4°. Le cube qui a pour côté la dixième partie du mètre est l'unité de volume; c'est le *Litre*. On emploie aussi le mètre-cube ou *Stère*.

5°. Le *Franc* est l'unité de monnoie; c'est une pièce d'argent dont le poids est de 5 grammes, et qui a un dixième d'alliage.

Mais ces mesures sont dans certains cas trop petites ou trop grandes, parce que leur usage conduiroit à des nombres trop grands ou trop petits; c'est pourquoi on les conçoit sous-divisées en d'autres unités. Ainsi on partage chacune en dix parties, et on nomme *Décimètre*, *Déciare*, *Décigramme*, *Décilitre*, *Décime*, la dixième partie du mètre, de l'are, du gramme, du litre et du franc.

Chaque dixième se partage lui-même en dix parties, etc.; de là les mots *Centimètre*, *Centime*. . . . *Millimètre*, etc., qui n'ont besoin, pour être compris, d'aucune explication.

De même, de dix mètres on a fait une unité qu'on nomme *Décamètre*: le *Décalitre* vaut dix litres, etc. Cent mètres forment l'*Hectomètre*; cent litres, l'*Hectolitre*;

(*) Ce n'est point ici le lieu d'expliquer les méthodes qui ont fait connoître la longueur du mètre, ni de quelles précautions on doit environner l'appareil qui sert à trouver le gramme. *Voy.* la *Physique de Haüy*, n°. 59. Nous nous contenterons de dire qu'on doit se servir d'eau pure à une température et une pression atmosphérique déterminées. On prend donc l'eau distillée à son maximum de densité, qui est 4 degrés centigrades au-dessus de la glace fondante, le baromètre marquant 76 centimètres.

cent grammes, l'*Hectogramme* . . . qui est le poids de 4 pièces de 5 francs ; mille mètres font le *Kilomètre* ; mille grammes, le *Kilogramme* . . . Dix mille mètres valent un *Myriamètre* ; dix mille grammes, un *Myriagramme*. . . . on voit par là que 4054, 352 mètres valent 4 kilomètres, 5 décamètres, 4 mètres, 3 décimètres, 5 centimètres, 2 millimètres ; mais on préfère l'énonciation 4054 mètres et $\frac{352}{1000}$; ou 405 décamètres et $\frac{4352}{10000}$, etc.

L'Are est le Décamètre carré, ou cent mètres carrés ; le Litre est le Décimètre cube ; le Stère est le mètre cube ; le Gramme est le poids d'un centimètre cube d'eau distillée au maximum de densité.

Tel est le système des poids et mesures ; la nomenclature est renfermée dans cinq mots *Are*, *Gramme*, *Litre*, *Stère*, *Franc* ; et leurs multiples désignés par les additifs *déca*, dix ; *hecto*, cent ; *kilo*, mille ; *myria*, dix mille ; puis les sous-multiples qu'on indique par *déci*, dix ; *centi*, cent ; *milli*, mille.

Il s'en faut de beaucoup qu'on ait besoin de toutes les unités qui résultent de ces assemblages ; mais l'analogie a déterminé leur création. L'idée simple et grande qui a donné naissance à ce système, repose sur la nécessité de prendre dans la nature un terme fixe et à en déduire toutes les mesures : par là, si quelque jour elles étoient perdues, il seroit facile de les retrouver.

L'esprit philosophique qui a présidé à cette belle conception est digne de notre siècle ; les hommes les plus célèbres y ont contribué ; on y reconnoît le génie des Laplace, Lagrange, Monge, Delambre, Legendre, Méchain, Lefebvre-Gineau, etc.... L'ignorance et la mauvaise foi peuvent seules refuser d'admettre cette admirable invention.

Nous en ferons mieux comprendre les avantages, en présentant le tableau des anciennes mesures ; on pourra juger de la complication des calculs qu'elles entraînent, apprécier l'arbitraire qui a reglé leur création, et les comparer aux premières. Il est d'ailleurs bon de connoître ces sortes de calculs, puisque les étrangers n'ont pas encore secoué le joug de leurs anciens systêmes.

54. L'unité de longueur se nomme *Toise*, elle se divise en 6 *Pieds* ; chacun d'eux à 12 *Pouces* de 12 *Lignes*. . . .

L'unité de poids est la *Livre* ℔, elle a 16 *Onces* ℥ ; chacune est partagée en 8 *Gros* ou *Drachmes* ʒ, et chaque gros en 72 *Grains* gr. ; le *Scrupule* ℈ vaut 24 grains ou le tiers d'un gros. On divise aussi la livre en 2 *Marcs* de 8 onces chaque, etc. . . . Le signe ß désigne une demie ; ainsi ʒ ß veut dire un demi-gros.

La *Livre* monnoie ou *Tournois* est une valeur absolument arbitraire qu'on a divisée en 20 *Sols* de 12 *Deniers* chaque.

Le *Jour* se partage en 24 *Heures* ; l'heure en 60 *Minutes* ′ ; la minute en 60 *Secondes* ″.

Du reste ces unités, leurs sous-divisions changent avec les divers pays ; à Lyon, la livre a 14 onces ; là on mesure les étoffes avec une longueur nommée *Aune* (elle a 43 pouces $\frac{1}{3}$) ici avec une *Verge*, etc. . . . A Paris, le *Boisseau* a 16 *Litrons* ; ailleurs, il n'en que 12 : la *Pinte* varie aussi de grandeur avec les lieux. Ces irrégularités tiennent à l'esprit qui a dirigé les créateurs de ces mesures. Il est inutile de nous arrêter à ces objets.

On récapitule ainsi les sous-divisions ci-dessus exposées.

Toise.	Pieds	Pouces.	Lignes.	Jour.	Heures.	Minutes.	Secondes.
1 =	6 =	72 =	864	1 =	24 =	1440 =	86400
	1 =	12 =	144		1 =	60 =	3600
		1 =	12			1 =	60

Livre.	Marcs.	Onces.	Gros.	Scrupules.	Grains.	Livre.	Sous.	Deniers.
1 =	2 =	16 =	128 =	384 =	9216	1 =	20 =	240
	1 =	8 =	64 =	192 =	4608		1 =	12
		1 =	8 =	24 =	576			
			1 =	3 =	72			
				1 =	24			

55. La comparaison des mesures anciennes et nouvelles peut être souvent nécessaire ; nous en présenterons ici les élémens.

La toise = 1,94903 mètres. Le mètre = 0,513074 toises.
L'aune = 1^{m},1824 = 3^{p} 7^{po} 8^{lig} Le mètre = 0,846 aunes.
L'hectare = 2,9249 arpens de Paris. L'arpent = $900^{t.c.}$ = 34,19 ares.

(L'arpent vaut 100 perches carrées ; la perche varie de longueur ; elle a 18 , 20 , 22 pieds. La perche de 18 pieds ou 3 toises, est la plus usitée à Paris : alors la perche carrée vaut 9 toises carrées ; l'arpent a 900 toises carrées.)

La toise carrée = 3,7987 mètres carrés.
La toise cube = $7^{stères}$, 4039. Le stère = $0^{t.\,cub.}$, 1351 = 0^{corde}, 26.
Le litron = 0^{litres} , 813. Le litre = 1^{litron} , 23.
La livre = $4^{hectog.}$, 895. Le kilogramme = 2^{livres}, 0429.
80 francs = 81 livres tournois.

Il est aisé de se servir de ces données pour convertir les anciennes mesures en nouvelles et réciproquement. Ainsi pour avoir la valeur de 1000 francs en livres, on ajoutera à 1000 fr. son 80e. ou le 8e. de 100 fr., et on aura 1012,5 livres ; (un liard par franc).

56. Pour ajouter ou soustraire les quantités complexes on écrit au-dessous les unes des autres les parties qui ont une même dénomination, et on opère successivement sur chacune en commençant par les plus petites. Si la somme surpasse le nombre d'unités nécessaires pour former une ou plusieurs unités de l'ordre supérieur, on les retient et on ne pose que l'excédant.

Exemples d'addition.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
154	3	7	9 $\frac{1}{2}$
23	2	8	11 $\frac{1}{3}$
132	5	10	3 $\frac{5}{6}$
0	2	7	1
311	2	10	1 $\frac{2}{3}$

Marcs.	Onces.	Gros.	Grains.
15	3	6	42
217	7	7	60
41	6	5	17
4	5	6	10
280	0	1	57

Livres.	Sous.	Deniers.
322	17	5
43	11	7
7	8	4
18	2	7
43	16	6
435	16	5

Jours.	Heures.	′	″
2	10	42	54
5	9	17	19
0	21	3	48
8	17	4	1

Dans le premier de ces exemples, la colonne des lignes donne 25 lignes $\frac{2}{3}$, ou 2 pouces 1 lig. $\frac{2}{3}$, parce que 12 lig. valent un pouce; on pose donc seulement 1 $\frac{2}{3}$ et on reporte 2 à la colonne des pouces, qui donne 34 ou 2 pieds 10 pouces, etc.

Voici quelques soustractions :

Livres.	Onces.	Gros.	Grains
32	9	2	44
12	12	5	12
19	12	5	32

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
487	0	0	0
319	4	3	10
167	1	8	2

Livres.	Sous.	Deniers.
349	17	4
127	8	7
222	8	9

Jours.	Heures	Minutes.	Secondes.
17	11	47	5
13	18	55	40
3	16	51	25

On voit qu'après avoir soustrait 12 grains de 44, on passe aux gros; mais comme 2 — 5 ne se peut, on ajoute une once ou 8 gros et on a 10 — 5 = 5; puis on ajoute pareillement une once aux 12 qu'il faut ôter de 9; de sorte qu'on dira 9 — 13 ne se peut; ajoutant une livre ou 16 onces on a 25 — 13 = 12, etc. . . . Cette opération est fondée sur le même principe que pour les nombres entiers.

Descartes, né le 3 avril 1596, est mort le 11 février 1650 ; Pascal, né le 19 juin 1623, est mort le 19 août 1662 ; Newton, né le 15 décembre 1642, est mort le 18 mars 1727. On demande la durée de la vie de ces grands mètres.

57. Pour la multiplication des nombres complexes, d'après les principes donnés (41), on opérera séparément sur les entiers et sur les fractions. Il se présente deux cas suivant que le multiplicateur est ou n'est pas complexe.

1er. *Cas.* On voudroit savoir le prix de 17 aunes $\frac{2}{3}$ d'une étoffe qui coûte 45 liv. 12 s. 6 den. l'aune ; il est clair qu'il faut répéter ce nombre 17 fois et $\frac{2}{3}$, de sorte que le multiplicateur 17 $\frac{2}{3}$ cesse de représenter des aunes et devient un nombre *Abstrait* (on appelle ainsi celui dont l'espèce d'unités n'est point désignée.) Pour répéter 45 liv. 12 s. 6 den. 17 fois, on multiplie d'abord 45 liv. puis 12 s. puis enfin 6 den. par 17. Le premier de ces calculs n'offre pas de difficultés ; et puisque 1 liv. répété 17 fois donne 17 liv., 10 s. ou $\frac{1}{2}$ liv. doit donner la moitié de 17 liv. ; 2 s. en donne le 10e., ou le 5e. du produit de 10s. On a pour 6 den. le quart du produit que donne 2 s. ; on prend ensuite les $\frac{2}{3}$ du multiplicande, et on ajoute le tout. Voici le type du calcul :

```
  45l. 12s. 6d.
  17 2/3
 ─────────────
 315l.          }
 450            } 17 fois 45l.
   8..10s.......pour 10s., la moitié de 17l.
   1..14........pour 2s. le 10e. de 17l., ou le 5e. de 8l. 10s.
   0.. 8...6d...pour 6d. le 1/4 du produit qu'a donné 2s.
  15.. 4...2....pour 1/3, le 1/3 du multiplicande.
  15.. 4...2....pour 1/3.
 ─────────────
 806l. 0s. 10d.
```

Tout l'art de ce genre d'opérations consiste à décomposer chaque fraction en d'autres qui aient l'*unité pour numérateur*, (c'est ce qu'on nomme *Fractions Aliquotes*) ce qui se réduit à partager le numérateur en facteurs de dénominateur. Ainsi 19 s., ou $\frac{19}{20}$ de livre, se décompose en $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ et $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$; il faudra donc prendre la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{4}$ et le $\frac{1}{5}$ de l'entier multiplicateur, considéré comme étant des livres. On pourroit aussi prendre $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ et deux fois $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$. De même pour $\frac{7}{8}$ on prendra $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ et $\frac{1}{8}$.

Observons que si le multiplicateur n'a qu'un seul chiffre, il est plus simple d'opérer comme pour l'addition. Dans l'exemple ci-contre, on dira 7 fois 18 grains = 126 grains = 1 gros 54 grains. On pose 54 et on retient 1. On trouve de même 29 gros, ou 3 onces 5 gros ; on pose 5 gros et on retient 3 onces, etc.

Liv.	Onc.	Gros.	Grains.
57	5	4	18
7			
401	6	5	54

Pour multiplier 14 s. par 483, il faut prendre les $\frac{14}{20}$ ou les $\frac{7}{10}$ de 483 livres ; on a $\frac{3381}{10}$ ou 338,1, ou enfin 338 liv. 2 s. On voit donc que pour *multiplier un nombre pair de sols, il faut en prendre la moitié et mettre au rang des sols le double des unités du produit*. Pour 18 s. × 56, comme 56 × 9 = 504, on a 50 liv. 8 s. ; 80 pièces de 12 s. font 8 × 6 = 48 liv.

2°. *Cas.* Cherchons la valeur de 36 marcs 6 onces 4 gros d'argent à 51 liv. 15 s. 5 den. le marc. On répétera d'abord 51 liv. 15 s. 5 den. 36 fois ; et ensuite autant de fois que 6 onces 4 gros sont contenus dans le marc : le multiplicateur est abstrait et cesse de représenter des marcs. Ainsi on ne multipliera d'abord 51 liv. 15 s. 5 den. que par 36, ainsi qu'on l'a expliqué ; puis par la fraction 6 onces 4 gros ; en prenant d'abord pour

4 onces la moitié du multiplicande total 51 liv. 15 s. 5 den., etc.

Il arrive souvent que pour faciliter les calculs on fait un *faux produit* : par exemple, si on avoit eu 14 s. au lieu de 15 s., il auroit fallu de même faire le produit de 1 s., qu'on auroit effacé après avoir trouvé le produit des 5 den.

	51$^{l.}$	15$^{s.}$	5$^{d.}$
	36$^{m.}$	6$^{o.}$	4$^{gr.}$
	306$^{l.}$		
	153		
Par 14^{s}....	25	4$^{s.}$	
1^{s}....	1	16	
4^{d}...	0	12	
1^{d}...	0	3	
4°...	25	17	8 $\frac{1}{2}$
2°...	12	18	10 $\frac{1}{4}$
4^{gr}...	3	4	8 $\frac{9}{16}$
	1905	16	3 $\frac{5}{16}$

Voici deux autres exemples :

	12$^{l.}$	18$^{s.}$	8$^{d.}$
	42$^{t.}$	5^{pi}	4$^{po.}$
	24$^{l.}$		
	48		
P^{r}. 18^{s}...	37	16$^{s.}$	
F. pr. de 1^{s}...	1	1	
P^{r}. 4^{d}..	0	14	
4^{d}..	0	14	
3^{pi}..	6	9	4$^{d.}$
2^{pi}..	4	6	2 $\frac{2}{3}$
4^{po}..	0	14	4 $\frac{4}{9}$
	554	13	11 $\frac{1}{9}$

	37$^{l.}$	15$^{s.}$	8$^{d.}$
	9$^{t.}$	3$^{pi.}$	11$^{po.}$
	340$^{l.}$	1$^{s.}$	0$^{d.}$
P^{r}. 3^{pi}.	18$^{l.}$	17	10
F.pr. de 1^{pi}.	6	5	11 $\frac{1}{3}$
P^{r}. 4^{po}.	2	1	11 $\frac{7}{9}$
4^{po}.	2	1	11 $\frac{7}{9}$
3^{po}.	1	11	5 $\frac{5}{6}$
	364	14	3 $\frac{7}{18}$

58. Dans la division il y a aussi deux cas, suivant que le quotient ou le diviseur représente le multiplicateur, et doit être considéré comme abstrait.

1er. *Cas.* Si le diviseur est le multiplicateur, le quotient est le multiplicande et doit être de la même espèce d'unités que le dividende, qui représente le produit.

Si le diviseur n'est pas complexe, on opérera tour-à-tour sur chaque espèce d'unités du dividende, en commençant par la plus grande. Ainsi pour diviser

234 liv. 15 s. 7 den. par 4, on prendra le quart de 234 liv. qui est 58 liv. avec le reste 2 liv. ou 40 s., qui joints à 15 s. donnent 55 s. ; le quart est 13 s. avec le reste 3 s. ou 36 deniers ; 36+7=43 d. dont le quart est 10 $\frac{3}{4}$ d., le quotient est donc 58 liv. 13 s. 10 $\frac{3}{4}$ den.

Un ouvrier a reçu 151 liv. 14 s. 6 d. pour 42 jours de travail ; pour savoir ce qu'il gagnoit par jour, on divisera 151 liv. 14 s. 6 d. par le nombre abstrait 42. On voit ci-contre le détail du calcul.

$$
\begin{array}{r|l}
151^{l}.\ 14^{s}.\ 6^{d}. & 42 \\
\hline
25^{l}. & 3^{l}.\ 12^{s}.\ 3^{d}. \\
\hline
500^{s}. & \\
14 & \\
\hline
514^{s}. & \\
94 & \\
10 & \\
\hline
120^{d}. & \\
6 & \\
\hline
126 & \\
0 &
\end{array}
$$

Si le diviseur est complexe, pour pouvoir le regarder comme abstrait, il faut d'abord faire disparoître les fractions qui l'affectent : pour cela on multipliera le dividende et le diviseur par le nombre qui exprime combien la plus petite espèce d'unités de celui-ci est contenue dans la plus grande. Cette opération n'altérera pas le quotient (21,6), et comme chaque espèce d'unités du diviseur produira des unités entières, il sera rendu exactement entier. Ainsi 42 toises 5 pieds 4 pouces ont coûté 554 liv. 13 s. 11 den. $\frac{5}{9}$; on demande le prix de la toise ? Comme 4 pouces ou $\frac{1}{3}$ de pied est contenu 18 fois dans la toise, on doit multiplier les deux nombres proposés par 18. La question devient : 772 toises ont coûté 9984 liv. 10 s. 8 den., quel est le prix de la toise ? la division donne 12 liv. 18 s. 8 den.

De même pour diviser 806 liv. 0 s. 10 den. par 17 $\frac{2}{3}$, il faut multiplier par 3, et on a 2418 liv. 2 s. 6 den. à diviser par 53. Si le diviseur est $3^{m}\ 7^{o}\ 4^{gr}$, on multi-

pliera par 16, parce que 4 gros ou la moitié de l'once, est contenu 16 fois dans le marc, etc.

2e. *Cas.* Si le diviseur est le multiplicande, il doit être de la même espèce que le dividende, et le quotient est abstrait : on fera disparoître les fractions du dividende et du diviseur, ainsi qu'il vient d'être dit. Par exemple, pour diviser 364 liv. 14 s. 3 den. $\frac{7}{18}$ par 37 liv. 15 s. 8 den. on multipliera ces deux nombres par $20 \times 12 \times 18$ ou 4320, parce que le 18e. de denier est contenu 4320 fois dans la livre. Il faudra donc diviser 1 575 565 liv. par 163 224, ce qui donne 9 $\frac{106549}{163224}$. Pour faire la preuve de la multiplication du n°. 52, il faut évaluer la fraction $\frac{106549}{163224}$ en parties de la toise, comme on va le dire.

Pour trouver combien de fois 143 liv. 17 s. 6 den. contient 11 liv., il faut multiplier par 40, et diviser entre eux les produits 5755 et 440.

59. On réduit une fraction en nombre complexe en divisant le numérateur par le dénominateur. Ainsi pour avoir les $\frac{5}{7}$ de la livre, on divisera 5 liv. par 7 et on aura 14 s. 3 den. $\frac{3}{7}$.

Réciproquement, pour convertir un nombre complexe en fraction à deux termes, il faut le réduire à sa plus petite espèce. Ainsi 14 s. 3 den. $\frac{3}{7}$ vaut 171 den. $\frac{3}{7}$ ou $\frac{1200}{7}$ de denier : comme la livre vaut 240 den., on divisera par 240, et on aura $\frac{1200}{1680}$ ou $\frac{5}{7}$ de livre.

Pour évaluer en sols et deniers la fraction 0,715 liv., il faut multiplier par 20, et on a 14,3 s. ; de même multipliant 0,3 s. par 12, on a 3,6 den. ; . . . . donc $0^{l},715 = 14$ s. 3,6 den.

On réduit une fraction complexe en décimales, en la convertissant d'abord en fraction à deux termes.

CHAPITRE III.

DES PUISSANCES ET DES RACINES.

1. *Formation des puissances.*

60. En multipliant un nombre par lui-même 1, 2, 3.... fois, on en obtient les puissances 2, 3, 4...

1re.	2e.	3e.	4e.	5e.	6e.	7e.	8e.	9e.
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Le carré de $\frac{3}{5}$ est $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$; le cube est $\frac{27}{125}$; . . . donc *on forme une puissance quelconque d'une fraction en élevant les deux termes à cette puissance.*

2. *Extraction des racines carrées.*

61. Le carré d'un nombre de deux chiffres, tel que 35, se forme par la multiplication de 35 par 35, ce qui exige quatre produits partiels; 1°. 5×5 ou le carré des unités; 2°. 30×5 ou le produit des dixaines par les unités; 3°. une seconde fois 30×5; 4°. 30×30 ou le carré des dixaines. Donc le carré d'un nombre de deux chiffres est formé *du carré des dixaines, deux fois le*

produit des dixaines par les unités, plus enfin le carré des unités. Ainsi $35^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$.

Pour multiplier $7 + 5$ par $7 + 5$, on multipliera 7 et 5 d'abord par 7, puis par 5; ce qui donnera $7^2 + 7 \times 5$ d'une part, et $7 \times 5 + 5^2$ de l'autre. Pour faire le carré de $7 + 5$, il ne suffit donc pas de carrer 7 et 5; il faut encore ajouter le double du produit de 7 par 5; on a ainsi $49 + 25 + 2 \times 35$ ou $144 = 12^2$. Ainsi *le carré d'un nombre composé de deux parties, se forme des carrés de chacune, augmentés du double de leur produit.* (*Voy.* n°. 97, 1°.)

62. Les carrés de 10, 100, 1000, ... sont 100, 10 000, 1 000 000. . . ainsi tout nombre de deux chiffres, étant compris entre 10 et 100, a son carré entre 100 et 10 000, c'est-à-dire, composé de 1 ou 2 chiffres: de même tout nombre de 2 chiffres en a 3 ou 4 à son carré, etc., et en général, *le carré a le double, ou le double moins un, des chiffres de la racine.*

Les nombres de 1 ou 2 chiffres ont leurs racines carrées comprises dans les tables n°s. 13 et 60. Quant aux autres nombres il faut distinguer deux cas.

1er. *Cas.* Si le nombre proposé, tel que 784, a 3 ou 4 chiffres, sa racine en a deux; et 784 est composé du carré des dixaines, de celui des unités et du double du produit des dixaines par les unités. Or, la première de ces parties se forme en ajoutant deux zéros au carré du chiffre des dixaines (16); d'où il suit que ce carré n'entre dans l'addition de ces trois parties qu'au rang des centaines. En séparant les deux chiffres 84, 7 contient donc le carré du chiffre des dixaines considérées comme des unités simples: il contiendra en outre les centaines produites par les autres parties du carré.

On prendra la racine du plus grand carré 4 contenu dans 7, et comme 7 est compris entre les carrés de 2 et de 3, le nombre proposé 784 l'est entre 20^2 et 30^2, ainsi la racine est entre 20 et 30; et on a 2 pour le chiffre des dixaines.

En retranchant 4 de 7, le reste 3 est la retenue produite par le carré des unités et le double des dixaines multiplié par les unités: 384 est donc composé de ces deux parties.

On forme ce dernier produit en multipliant le double du chiffre des dixaines par les unités et mettant un zéro à droite; ainsi dans l'addition, ce produit est compris au rang des dixaines, et contenu par conséquent dans 38, en séparant le chiffre 4 des unités: 38 contient en outre les dixaines produites par le carré des unités et celles qui proviennent de ce que 784 peut n'être pas un carré exact. Si ces dixaines étoient connues, en les ôtant de 38, le reste divisé par 4, double du chiffre des dixaines, donneroit les unités. Divisons donc 38 par 4, le dividende sera plus grand que celui qu'on doit employer, et le quotient pourra être trop grand; mais il sera facile de le rectifier.

Car si le quotient $\frac{38}{4}$, ou 9 en nombre entier, représente en effet les unités, en plaçant 9 à côté du double 4 du chiffre des dixaines, 49 sera le double des dixaines ajouté aux unités; et 49×9 sera le double du produit des dixaines par les unités, plus le carré des unités; or, $49 \times 9 = 441$, qui est > 384, donc 9 est trop grand. On éprouvera le chiffre 8 de la même manière, et comme $48 \times 8 = 384$, qui retranché du reste donne 0, on voit que 784 est le carré

$$\begin{array}{r|l} 7.84 & 28 \\ \hline 384 & 49 \quad 48 \\ 384 & \;\;9 \quad\;\; 8 \\ \hline 0 & 441 \quad 384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 27.35 & 52 \\ \hline 235 & 102 \\ 204 & \;\;\;\;2 \\ \hline 31 & 204 \end{array}$$

exact de 28. On a mis ici le type du calcul, ainsi que celui de $\sqrt{2735}$ qui est 52, avec le reste 31; de sorte que 52 est la racine du plus grand carré contenu dans 2735. On trouve aussi $\sqrt{121} = 11$.

```
1.2 1 | 11
  2.1 |----
  2 1 | 21
----- |  1
    0 |----
      | 21
```

2°. *Cas.* On raisonnera de même si le carré a plus de 4 chiffres; car alors bien que la racine en ait plus de 2, on peut encore la regarder comme composée de dixaines et d'unités; 523 a 52 dixaines et 3 unités.

Ainsi pour 273 529, on aura encore le carré des dixaines, considérées comme simples unités, contenu dans 2735, et on verra de même que la racine du plus grand carré contenu dans 2735, donne les dixaines. On a trouvé ci-dessus 52 pour cette racine et 31 pour reste, de sorte que descendant 29 à côté de 31, on a 3129 pour le double produit des dixaines par les unités, plus le carré des unités; supprimant le chiffre 9, on divisera 312 par 104 double des dixaines 52; on aura les unités de la racine, ou un nombre plus grand.

```
27.3 5.2 9 | 523
 2 3.5     |----------
 2 0 4     | 102  1043
---------- |   2     3
   3 1 2.9 |----------
   3 1 2 9 | 204  3129
---------- |
         0 |
```

Enfin plaçant le quotient 3, à droite de 104 et multipliant 1043 par 3, on retranchera le produit 3129 du reste. On trouve que 523 est la racine cherchée.

Ce raisonnement s'applique à tout nombre; on voit qu'il faut le partager en tranches de deux chiffres, en commençant par la droite, ce qui ne laissera qu'un seul chiffre dans la dernière tranche lorsque le nombre des chiffres sera impair. Chaque tranche donne un chiffre à la racine, en opérant sur chacune comme il vient d'être dit.

Nous en mettons ici un exemple. On peut aussi s'exercer sur les suivans.

$\sqrt{7\,283\,291}$

$\sqrt{54\,000\,000}$

$\sqrt{3\,179\,421}$

11.1 1.0 8.8 8.8 9	33 333
2 1.1	63 663
1 8 9	3 3
2 2 0.8	189 1989
1 9 8 9	6 663 66 663
2 1 9 8.8	3 3
1 9 9 8 9	19 989 199 989
1 9 9 9 8.9	
0	

63. On appelle *Commensurables* ou *Rationnels* les nombres qui ont une commune mesure avec l'unité : tel est $\frac{2}{5}$, parce que le 5e. de l'unité est contenu 5 fois dans 1 et 2 fois dans $\frac{2}{5}$. Mais $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, . . . sont *Irrationnels*, ainsi que la racine de tout nombre entier qui n'est pas le carré exact d'un entier ; c'est-à-dire que $\sqrt{7}$, par exemple, ne peut être exprimé exactement par un nombre fractionnaire ; car soit, s'il se peut, $\sqrt{7}=\frac{13}{5}$, élevant au carré on auroit $7=\frac{169}{25}$, ce qui est absurde puisque la fraction $\frac{169}{25}$ est essentiellement irréductible, $\frac{13}{5}$ l'étant (33, 5°).

$\sqrt{7}$ tombe entre 2 et 3 ; mais il est facile de voir que $\sqrt{7}$ tombe aussi entre 2 et 2 $\frac{3}{4}$, d'où il suit que 2 $\frac{3}{4}$ approche plus que 3 de $\sqrt{7}$. On peut même se proposer d'approcher de $\sqrt{7}$ de manière à en différer moins de $\frac{1}{5}$; ce qui signifie qu'on cherche deux fractions, telles que $\frac{13}{5}$ et $\frac{14}{5}$, et qui aient 5 pour dénominateur, dont les numérateurs diffèrent de 1, et dont les carrés comprennent 7 entre eux. Cette définition sert d'explication à ce paradoxe qu'on peut approcher autant qu'on veut de $\sqrt{7}$, quoique cette racine n'existe pas. Multiplions par 5 les fractions cherchées et le nombre $\sqrt{7}$, $5\sqrt{7}$ sera compris entre les numérateurs inconnus ; élevons au carré, 25×7 ou 175 sera compris entre les carrés des numérateurs, qui seront par



conséquent les nombres entiers, par excès et par défaut de $\sqrt{175}$, on trouve 13 et 14; $\frac{13}{5}$ et $\frac{14}{5}$ sont donc les fractions cherchées.

De même pour avoir $\sqrt{(3\frac{5}{7})}$ à moins de $\frac{1}{11}$, il faudra multiplier $3\frac{5}{7}$ par le carré de 11, ce qui donne $3\frac{5}{7} \times 121$ ou $449\frac{3}{7}$; puis extraire $\sqrt{449\frac{3}{7}}$ en nombre entier, ou $\sqrt{449}$; on aura 21; donc $\sqrt{3\frac{5}{7}}$ est comprise entre $\frac{21}{11}$ et $\frac{22}{11}$ ou 2. En général *pour extraire la racine d'un nombre par approximation on le multipliera par le carré du dénominateur donné; la racine en nombre entier de ce produit sera le numérateur cherché.*

64. Si on veut approcher à l'aide des décimales, c'est-à-dire, à moins de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc. il faudra multiplier le nombre par 10^2, 100^2, ... ce qui revient à ajouter 2, 4, ... zéros s'il est entier, ou à reculer la virgule de 2, 4, ... rangs à droite s'il renferme des décimales. On extrait ensuite la racine en nombre entier, puis on place la virgule convenablement. Ainsi $\sqrt{0,3}$ à moins $\frac{1}{100}$, se trouve en reculant la virgule de 4 rangs; et comme $\sqrt{3000}=54$, on a $\sqrt{0,3}=0,54$.

De même $\sqrt{5,7}$, à moins de $\frac{1}{100}$, est $=\frac{\sqrt{57000}}{100}$ ou 2,38. Nous calculerons ici $\sqrt{321}$ et $\sqrt{2}$. Il est clair que dans la 1re. opération au lieu de joindre les deux zéros à 321, on peut les mettre simplement au reste 32; de même si on eût voulu deux décimales, il auroit fallu mettre quatre zéros après 321, ce qui revient à joindre deux zéros au second reste 59. On se contente ainsi de placer les zéros 2 à 2 après chaque

```
3.21.00.   { 17,9
2 2.1      {   27     349
189        {    7       9
  320.0    {  189    3141
  3141
     59 etc.

2
10.0           { 1,41421
   40.0        {   24     281
   11 90.0     {  2824  28284
      60 40.0
      3 83 60.0
      1 00 75 9
```

reste, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'approximation demandée.

65. On conclut de la manière dont on forme le carré d'une fraction (60) que *la racine d'une fraction s'obtient en extrayant celle de chacun de ses deux termes* . . . .
$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

Mais lorsque la fraction est irrationnelle, on évite la double approximation, en rendant l'un des termes un carré exact; et on préfère le dénominateur, parce qu'il marque le nombre de parties contenues dans l'unité. *On multipliera donc les deux termes de la fraction par son dénominateur, puis on extraira la racine de chacun* . . . .
$\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{21}{7^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, or $\sqrt{21} = 4,582$, dont le 7e. est $0,654 = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

De même $\sqrt{\left(3\frac{5}{7}\right)} = \sqrt{\frac{26}{7}}\ \sqrt{\frac{182}{7^2}}$; et comme $\sqrt{182} = 13,4907$, on a enfin $\sqrt{\left(3\frac{5}{7}\right)} = 1,9272$.

En général, lorsqu'on soumet une quantité irrationnelle au calcul, il faut toujours sous-entendre que les raisonnemens sont établis sur la valeur approchée de cette quantité; on rend donc raison de ces opérations de la même manière que pour les nombres fractionnaires. Ainsi,

1°. On conçoit aisément ce que signifie $4\sqrt{7}$

2°. $4 \times \sqrt{7} = \sqrt{7} \times 4 = \sqrt{(4^2 \times 7)} = \sqrt{112}$.

3°. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{(2 \times 3)} = \sqrt{6}$

4°. On a le droit de multiplier par le même nombre les deux termes d'une fraction irrationnelle; . . . .
$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{7}} \ldots$

66. Nous terminerons par plusieurs remarques.

1°. On doit toujours préparer les nombres de manière à ne soumettre que des entiers au calcul de l'extraction.

2°. Le nombre des décimales d'un carré est toujours pair et double de celui de la racine : on doit ajouter des zéros ou supprimer des décimales, pour que cette condition soit remplie dans tous les cas.

3°. Chaque tranche ne devant donner qu'un seul chiffre, on ne peut mettre à la fois plus de 9 à la racine.

4°. Le carré d'un nombre, tel que 18, étant donné, pour avoir celui du nombre suivant 19, comme . . . . . $19 = 18 + 1$, le carré est $18^2 + 2 \times 18 + 1$, (61) ; on ajoutera donc 37 à 324 carré de 18, et on aura $361 = 19^2$. En général, *quand on a le carré d'un nombre, en ajoutant un plus le double de ce nombre, on a le carré du nombre suivant*. Il suit de là que chaque tranche ne peut donner un reste plus grand que le double de la racine obtenue; car alors il faudroit mettre une unité de plus à cette racine.

3. *Extraction des racines cubiques.*

67. Avant d'extraire la racine cubique, il convient d'analyser la loi suivant laquelle se forme le cube, qui est le produit d'un nombre par son carré. En imaginant ce nombre décomposé en deux parties, on a vu (61) que le carré est composé du carré de la première, du carré de la seconde, et du double de leur produit : c'est le système de ces trois quantités qu'il faut multiplier par les deux parties du nombre donné. Or, en les multipliant d'abord par la première, on obtient

1°. Le cube de la première partie ;

2°. Le produit du carré de la seconde par la première ;

3°. 2 fois le carré de la première par la seconde.

De même, en multipliant le carré par la seconde partie du nombre donné, on trouve

1°. Le carré de la première multiplié par la seconde.

2°. Le cube de la seconde.

3°. 2 fois le produit du carré de la seconde par la première.

En réunissant ces six résultats, on voit que le cube de tout nombre formé de deux parties se compose de quatre (*voy.* n°. 97 2°.); 1°. *le cube de la première*; 2°. 3 *fois le carré de la première multiplié par la seconde*, 3°. 3 *fois le produit du carré de la seconde par la première*, 4°. *le cube de la seconde.*

Ainsi, $(7+5)^3 = 7^3 + 3.7^2.5 + 3.5^2.7 + 5^3$; ou $12^3 = 343 + 735 + 525 + 125 = 1728$.

Concluons de là que le cube de tout nombre composé de dixaines et d'unités est formé du *cube des dixaines*, 3 *fois le carré des dixaines multiplié par les unités*, 3 *fois le carré des unités par les dixaines*, *enfin le cube des unités.*

68. On démontrera comme ci-devant (62) que le cube d'un nombre a le triple des chiffres de sa racine, ou le triple moins 1 ou moins 2.

Les racines des nombres < 1000, n'ayant qu'un chiffre, le tableau (60) les fait connoître. Nous partagerons l'examen des autres nombres en deux cas.

1er. *Cas.* Si la racine n'a que deux chiffres, le cube en a 4, 5 ou 6; tel est 21952. Pour en obtenir la racine, je remarque que le cube des dixaines cherchées se forme en cubant le chiffre des dixaines et plaçant 3 zéros à droite (17). Donc en séparant les trois chiffres 952 du nombre proposé, 21 contient le cube du chiffre des dixaines considérées comme des unités simples, et en outre les milles qui proviennent des autres parties. Le plus grand cube contenu dans 21 est 8, dont la racine

est 2; c'est le chiffre des dixaines : car puisque 21952 est > 20^3 ou 8000, et < 30^3 ou 27000, la racine cherchée est comprise entre 20 et 30.

Otons 8 de 21, il reste 13952 qui représente les trois autres parties du cube : or le produit de trois fois le carré des dixaines par les unités, se forme en multipliant le triple de 4 ou 12 par les unités, et plaçant en outre deux zéros à droite : ainsi, séparons les deux chiffres 52, 139 contiendra 12 fois les unités, et les centaines produites par les deux autres parties du cube. En divisant 139 par 12, le quotient sera donc les unités, ou un nombre plus grand : et comme *ce chiffre ne peut excéder* 9, on prendra 9 pour quotient de $\frac{139}{12}$.

Il s'agit de vérifier si 9 est plus grand que les unités. Pour cela sous 1200, qui est le triple du carré des dixaines, plaçons le triple du produit des dixaines par 9, ou $3.20.9 = 540$; puis le carré de 9 ou 81, et multiplions la somme 1821 par 9. Si 9 est le chiffre des dixaines, le produit devra être égal au reste ou moindre que lui, puisqu'on formera ainsi les trois parties que ce reste contient. Ce produit excède 13952; d'où il suit que les unités sont < 9. On essaiera de même 8; et comme en faisant la même épreuve on trouve précisément 13952, on reconnôît que 28 est la racine cubique exacte de 21952.

21.9 52	28	Racine.
8	12	12
13 9.52	54	48
13 9 52	81	64
0	1821	1744
	9	8
	16389	13952

2e. *Cas.* Si la racine a plus de 2 chiffres, comme pour le nombre 12 305 472 000, on raisonnera comme précédemment (62, 2°.). On verra qu'il faut 1°. couper le nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite.

2°. Extraire la racine cubique de la dernière tranche 12 ; elle est 2, qui est le chiffre des milles de la racine : retranchant de 12, le cube 8 des milles, il reste 4.

3°. Descendre à côté de ce reste 4, la tranche suivante 305, dont on séparera deux chiffres 05 ; et diviser 43 par 12, triple du carré du chiffre obtenu. Le quotient 3 doit être éprouvé comme on vient de le dire. On reconnoît qu'il y a 3 centaines ; le reste est 138.

4°. Descendre près de ce reste la tranche 472, dont on séparera de même 72 ; et diviser 1384 par 1587 triple du carré de 23.

Et ainsi de suite. Voici le type du calcul.

	12 3 05.4 72.000	2308	Racine.
	4 3.05	12	15 870 0
	4 1 67	18	55 20
	1 38 4.72	9	64
	1 38 4 72 0.00	1389	15 925 264
	1 27 4 62 1 12	3	8
Reste....	11 0 69 8 88	4167	127 402 112

69. On démontrera de même que précédemment que,

1°. La racine cubique d'une fraction se trouve en extrayant celle de chacun de ses deux termes ; s'ils sont irrationnels, on rendra le dénominateur (65) un cube exact, en multipliant chaque terme par le carré de ce dénominateur. $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5.49}{7^3}}=\frac{1}{7}\sqrt[3]{245}$.

2°. Lorsqu'un nombre entier n'a pas de racine cubique entière, elle n'en a pas non plus de fractionnaire (33, 5°.) : mais on peut en approcher indéfiniment. Pour obtenir $\sqrt[3]{3}$ à moins de $\frac{1}{4}$, on multipliera 3 par le cube de 4, et on aura 3.64 ou 192, dont la racine cubique en nombre entier est 5 : donc $\frac{5}{4}$ est le nombre demandé, et $\sqrt[3]{3}$ tombe entre $\frac{5}{4}$ et $\frac{6}{4}$. De même pour $\sqrt[3]{3\frac{5}{7}}$ à moins de $\frac{1}{11}$;

on a $3\frac{5}{7} \times 11^3 = 4943\frac{5}{7}$, la racine est 17; donc $\frac{17}{11}$ est approché de $\sqrt[3]{3\frac{5}{7}}$ à moins de $\frac{1}{11}$.

3°. Pour approcher à l'aide des décimales, on reculera la virgule d'autant de fois trois rangs à droite, qu'on veut de chiffres décimaux : on ajoutera pour cela un nombre convenable de zéros si cela est nécessaire. Ainsi pour avoir $\sqrt[3]{0,3}$ à moins de $\frac{1}{100}$, on prendra $\sqrt[3]{300\,000}$ qui est 67, d'où $\sqrt[3]{0,3} = 0,67$. De même $\sqrt[3]{5,7}$ à moins de $\frac{1}{10}$ se trouve en prenant $\sqrt[3]{5700}$ qui est 18, et on a 1,8. Enfin $\sqrt[3]{3,2178}$ à moins de $\frac{1}{10}$. . . . . est $= \frac{1}{10}\sqrt[3]{3217} = 1,5$.

4°. Si le nombre proposé est entier on se contentera de placer près de chaque reste une tranche de trois zéros, jusqu'à ce qu'on ait obtenu le nombre de chiffres décimaux qu'on desire.

Voici le calcul pour $\sqrt[3]{477}$

477	7.81339	
343	147	18252
1340.00	168	234
1315 52	64	1
24 480 00	16444	1827541
18 275 41	8	1
6 204 590.00		
etc.		

De même on trouvera $\sqrt[3]{3} = 1,442249$....

5°. Si le nombre est fractionnaire, après avoir rendu le dénominateur un cube exact (1°), on approchera de la racine du numérateur. $\sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \frac{1}{7}\sqrt[3]{245} = \frac{1}{7} \times 6,2573 = 0,8939$. De même $\sqrt[3]{17\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{53}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{477}$; or $\sqrt[3]{477} = 7,81339$, ainsi la racine cherchée est 2,604463.

CHAPITRE IV.

DES RAPPORTS.

1. *Des Équidifférences et Proportions.*

70. On peut comparer entre elles deux grandeurs sous deux points de vue; en cherchant ou l'excès de l'une sur l'autre, ou le nombre de fois qu'elles se contiennent mutuellement. Le résultat de cette comparaison s'obtient par une soustraction dans le premier cas, et par une division dans le second. On nomme *Raison* ou *Rapport* de deux nombres, le quotient qu'on trouve en divisant l'un par l'autre. C'est ainsi que 3 est le rapport de 12 à 4, puisque $\frac{12}{4}$ ou 3 est le quotient des nombres 12 et 4. On pourroit également dire que le rapport de 12 à 4 est $\frac{4}{12}$ ou $\frac{1}{3}$, puisqu'il est indifférent de dire que le premier des nombres est triple du second, ou celui-ci le tiers de l'autre. Nous conviendrons à l'avenir de diviser le premier par le second.

Le premier terme d'un rapport est l'*Antécédent*, le second est le *Conséquent*.

On ne change visiblement pas la différence entre deux quantités, en leur ajoutant un même nombre ou le retranchant. C'est ainsi que $12-5=13-6=11-4$.

Pareillement (21, 6°.) on n'altère pas un rapport, en multipliant ou divisant ses deux termes par un même nombre. $\frac{12}{12}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$.

Il est aisé d'attacher un sens net au rapport des quantités irrationnelles, puisqu'elles n'entrent dans le calcul que comme représentant leurs valeurs approchées (65). Du reste, ce rapport peut quelquefois être commensurable : ainsi, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\frac{\sqrt{4}}{1}=\frac{2}{1}$.

71. Lorsque la différence entre deux nombres, tels que 10 et 8 est la même qu'entre deux autres 7 et 5, ces quatre quantités forment une *Équidifférence*; . . . . $10-8=7-5$. Quand le rapport de deux nombres est le même que celui de deux autres, ces quatre quantités forment une *Proportion ;* elle se constitue par *l'égalité de deux rapports* : 20 et 10, aussi bien que 14 et 7 ont 2 pour rapport, on a donc une proportion entre 20, 10, 14 et 7, qu'on écrit ainsi $20:10::14:7$, et qu'on énonce 20 *est à* 10 *comme* 14 *est à* 7. On peut aussi l'indiquer ainsi $\frac{20}{10}=\frac{14}{7}$. Lorsque nous préférerons cette dernière notation, ce qui arrivera le plus souvent, nous lui conserverons l'énoncé reçu : 20 est à 10 comme 14 est à 7 ; et non pas 20 divisé par 10 égale 14 divisé par 7 ; quoique ces locutions soient équivalentes.

Les termes 20 et 7 sont les *Extrêmes*, 10 et 14 les *Moyens* de la proportion.

Lorsque les deux moyens sont égaux entre eux, on appelle la *Proportion Continue* : telle est la suivante $16:24::24:36$, qu'on écrit ainsi $\div 16:24:36$. Le second terme se nomme *Moyen proportionnel.*

72. Suivant que les restes de deux soustractions, $10-8$ et $7-5$ sont égaux ou inégaux, ils le seront encore après leur avoir ajouté la somme $8+5$ des quantités soustractives; ce qui donne $10+5$ et $7+8$. Donc lorsqu'on a l'équidifférence $10-8=7-5$, *la somme des*

extrêmes est égale à celle des moyens, et réciproquement si $10+5=7+8$, on a l'équidifférence $10-8=7-5$.

Il est donc bien aisé de trouver un terme d'une équidifférence connoissant les trois autres; car soit $10-8=7-x$, puisque $x+10$ doit être $=8+7$ ou 15, il faut (4) que $x=15-10$.

Soient pareillement deux rapports $\frac{6}{3}$ et $\frac{14}{7}$; pour juger s'ils sont égaux ou inégaux, il faut réduire au même dénominateur, et on a 6×7 d'une part et 14×3 de l'autre. Donc *si le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, il y a proportion, et réciproquement.*

On voit que 1°. si on a quatre nombres 6, 3, 14 et 7, tels que les produits 6×7 et 3×14 se trouvent égaux, on en conclura l'égalité de leurs rapports ou la proportion $\frac{6}{3}=\frac{14}{7}$, ou $6 : 3 :: 14 : 7$. De sorte qu'on pourra toujours former une proportion avec les facteurs de deux produits égaux (*Voy.* n°. 33).

2°. Le produit des moyens devient un carré, s'ils sont égaux; donc *le moyen proportionnel entre deux nombres est la racine carrée de leur produit.* Entre 3 et 12, le moyen proportionnel est $x=\sqrt{3\times 12}=6$. Réciproquement si on a $6^2=3\times 12$, on pourra former la proportion continue $\div 3 : 6 : 12$.

3°. Si une proportion renferme un terme inconnu, telle que $6 : 3 :: 14 : x$; comme 3 fois 14 ou 42, doit être égal à 6 fois l'inconnue, elle est (5) le quotient de 42 divisé par 6, ou $\frac{42}{6}=7$. En général *l'un des extrêmes se trouve en divisant le produit des moyens par l'extrême connu.* Si l'inconnue étoit un moyen, on diviseroit le produit des extrêmes par le moyen connu.

4°. On peut sans altérer l'exactitude d'une proportion faire subir aux divers termes qui la composent tous les changemens qui conduisent encore à donner le produit des extrêmes égal à celui des moyens. Ainsi pour . . . . . . $6 : 3 :: 14 : 7$, qui donne $6 \times 7 = 3 \times 14$, on pourra

I. Déplacer les extrêmes entre eux, ou les moyens entre eux, (ce qu'on désigne par *Alternando*); ainsi

$$6 : 14 :: 3 : 7$$

ou $7 : 3 :: 14 : 6$

ou $7 : 14 :: 3 : 6.$

II. Mettre les extrêmes à la place des moyens, (ce qu'on nomme *Invertendo*)

$$3 : 6 :: 7 : 14.$$

III. Enfin multiplier ou diviser les deux antécédens ou les deux conséquens par le même nombre.

73. En appliquant le théorême du n°. 33 à la proportion $30 : 6 :: 15 : 3$, ou $\frac{30}{6} = \frac{15}{3}$, on trouve

$$\frac{30 \pm 15}{6 \pm 3} = \frac{15}{3} \quad \text{et} \quad \frac{30 + 15}{6 + 3} = \frac{30 - 15}{6 - 3},$$

Donc 1°. *la somme ou la différence des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.*

2°. *La somme des antécédens est à leur différence comme la somme des conséquens est à leur différence.*

3°. Soit une suite de rapports égaux $\frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{30}{15}$, ou aura $\frac{6 + 10 + 14 + 30}{3 + 5 + 7 + 15} = \frac{14}{7} = \frac{30}{15}$; donc *dans toute suite de rapports égaux, la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.*

4°. Si on renverse la proportion donnée, on a. . . . . 30 : 15 :: 6 : 3, d'où $\frac{30 \pm 6}{15 \pm 3} = \frac{6}{3}$.

74. *On peut multiplier deux proportions terme à terme;* en effet 30 : 15 :: 6 : 3 et 2 : 3 :: 4 : 6 donnent les fractions égales $\frac{30}{15} = \frac{6}{3}$ et $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; on trouve en les multipliant 30 × 2 : 15 × 3 :: 6 × 4 : 3 × 6.

Donc *on peut élever une proportion au carré, au cube*...... et par conséquent on peut aussi *en extraire la racine carrée, cubique*.....

2. Des Règles de trois.

75. Lorsque les élémens d'un problême peuvent former une proportion dont l'inconnue est le dernier terme, un calcul simple (72, 3°.) en donne la valeur : c'est ce qu'on nomme une *Règle de trois* : ainsi, 30 ouvriers ont fait 20 mètres d'ouvrage, combien 21 ouvriers en feroient-ils dans le même tems? on trouve 30 : 20 :: 21 : x, en désignant par x le nombre d'ouvriers demandé; on a $x = \frac{20.21}{30} = 14$. On reconnoît que la solution d'une question dépend des règles de trois, lorsque l'énoncé est formé de deux périodes ; les deux termes de la première étant *Homogènes* respectivement à ceux de la seconde, c'est-à-dire, de même nature 2 à 2 ; et que de plus ces termes peuvent être multipliés ou divisés par le même nombre. Ainsi dans notre problême 30 ouvriers et 21 ouvriers sont homogènes, et on pourroit multiplier ces nombres par 2, 3,..... sans rien changer au problême. Au contraire, le tems qu'une pierre emploie à tomber, n'étant pas double lorsque la hauteur est double : un tonneau n'employant pas à se vider un tems triple, lorsque sa capacité

est triple : ces élémens ne peuvent faire partie d'une règle de trois.

76. Après avoir distingué si la solution d'un problème peut être donnée par une proportion, il ne reste plus qu'à assigner à chaque terme le rang qu'il y doit occuper. Le dernier et le troisième sont d'abord l'inconnue et son homogène, le seul qui puisse lui être comparé. La question indique d'ailleurs lequel de ces deux nombres surpasse l'autre, ce qui fixe la place du 1er. et du 2e. termes, puisque les antécédens doivent être ensemble plus grands ou plus petits que leurs conséquens.

Ainsi après avoir posé ci-dessus 20 mètres : x mètres, on voit que 21 ouvriers doivent faire moins d'ouvrage que 30, et que le conséquent x est < 20; donc, des deux nombres 30 et 21, 30 est le premier, et on a . . . . . $30 : 21 :: 20 : x$.

Les deux exemples suivans éclairciront ceci :

Un ouvrage a été fait en 5 jours par 57 ouvriers, combien faudroit-il de jours à 19 ouvriers pour faire le même ouvrage? Puisqu'on pourroit prendre 2 ou 3 fois plus de jours et autant de fois moins d'ouvriers, la question dépend des proportions. On placera d'abord 5 jours : x jours, et comme il faut plus de jours à 19 ouvriers qu'à 57, pour accomplir la même tâche, le conséquent x est > 5; 57 est donc le conséquent du premier rapport, et on a 19 ouvr. : 57 ouvr. :: 5 jours : x jours $= \frac{5.57}{19} = 15$ jours.

Il a fallu 6 mètres d'une étoffe large de $\frac{2}{4}$ pour couvrir un meuble, combien en faudra-t-il d'une étoffe large de $\frac{2}{3}$? Quoiqu'ici les quatre termes soient des mètres, on reconnoît que le nombre 6 mètres est l'homogène de l'inconnue, parce qu'ils expriment seuls des longueurs;

ainsi la proportion est terminée par 6 mètres $: x$ mètres. Or il faut moins de longueur à l'étoffe qui est la plus large; comme $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, on a $x > 6$; ainsi $\frac{2}{3}$ est l'antécédent du premier rapport, et on trouve $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} :: 6 : x$ d'où $x = 6 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = 6\frac{3}{4}$.

77. Quoiqu'il soit toujours facile de faire ce raisonnement, en l'évitant on donne plus de rapidité au calcul. On distingue deux sortes de rapports, le *Direct* qui est formé de nombres qui croissent ou décroissent ensemble ; l'un décroît au contraire quand l'autre croît, dans le rapport *Inverse*. Les 30 ouvriers et 20 mètres de la première question sont en rapport direct, parce que *plus* il y a d'ouvriers et *plus* ils font d'ouvrage. Dans la seconde au contraire 57 ouvriers et 5 jours sont en rapport inverse, parce que *plus* il y a d'ouvriers, et *moins* on doit les employer de jours pour faire un ouvrage.

Lorsque les termes d'une question sont en rapport direct, ils se présentent dans les mêmes rangs qu'ils doivent occuper dans la proportion; pourvu qu'en exprimant la question, on donne le même ordre aux termes homogènes dans les deux périodes. Mais si le problème a ses rapports inverses, les termes doivent procéder en sens opposé dans la proportion, de sorte que le dernier des termes énoncés soit écrit le premier, etc.... L'inconnue étant toujours à la quatrième place. Cela résulte de ce qui a été dit ci-dessus.

Voici encore plusieurs exemples de règles de trois.

I. Un homme a fait 50 lieues en 8 jours, combien sera-t-il de jours à faire 80 lieues? Règle directe : ainsi $50 : 8 :: 80 : x = 12\frac{4}{5}$.

II. Un homme a fait une route en 8 jours, marchant 7 heures par jour, combien eût-il mis de tems s'il

eût marché 10 heures par jour? Règle inverse; ainsi $10 : 7 :: 8 : x = 5, 6$.

III. Si 17 marcs 5 onces 4 gros d'argent ont coûté 869 liv. 15 s. 6 d.; combien coûteroient 14 marcs 3 onces 2 gros $\frac{1}{2}$? Règle directe; donc

$17^m\ 5^o\ 4^g : 869$ liv. 15 s. 6 d. $:: 14^m\ 3^o\ 2^g\ \frac{1}{2} : x$ liv.

On simplifie le calcul en multipliant les deux antécédens par 16; et on a $283^m : 869$ liv. 15 s. 6 d. $:: 230^m\ 5^o : x$. On trouve $x = 708$ liv. 16 s. 0 $\frac{1401}{1132}$ d.

IV. 6 escadrons ont consommé un magasin de fourrage en 54 jours, en combien de jours 9 escadrons l'eussent-ils consommé? Règle inverse, d'où $9 : 54 :: 6 : x = 36$.

V. Un vaisseau a encore pour 10 jours de vivres; mais on veut tenir la mer encore 15 jours, à quoi doit être réduite chaque ration? On ne trouve pas ici les quatre termes; mais il est évident que l'un est sous-entendu et que le problème doit être conçu de cette manière. On donneroit 1 ration à chaque homme, s'il falloit tenir la mer 10 jours, ou doit la tenir 15; que donnera-t-on? Règle inverse; ainsi, $15 : 10 :: 1 : x = \frac{2}{3}$.

78. *Règles de trois composées.* On ramène souvent aux proportions des questions qui renferment plus de trois termes donnés. Il faut alors qu'elles soient formées de deux périodes qui contiennent des nombres homogènes deux à deux, et variables proportionnellement. En voici un exemple.

Si 20 hommes ont fait 160 mètres d'ouvrage en 15 jours, combien 30 hommes en feroient-ils en 12 jours? Nous assemblerons dorénavant les termes homogènes comme on le voit ci-contre.

Hommes.	Mètres.	Jours.
20	160	15
30	x	12

Il se présentera deux cas, suivant que les termes qui ne répondent pas à l'inconnue sont en rapport direct ou

inverse. Ici, 20 hommes et 15 jours sont en rapport inverse ; on peut donc doubler, tripler.... l'un des nombres, pourvu qu'on divise l'autre par 2, 3,... et la question reste la même. Multiplions 20 hommes par 15, et divisons 15 jours par 15 : il viendra 300 hommes et 1 jour : de même, multiplions 30 hommes par 12, et nous aurons 360 hommes et 1 jour. La question devient donc, si 300 hommes ont fait 160 mètres en un jour, combien 360 hommes en feroient-ils en un jour ? Le tems étant le même de part et d'autre, il est inutile d'y avoir égard, et on a la règle directe $300 : 160 :: 360 : x = 192$ mètres.

Hommes.	Mètres.	Jours.
300	160	1
360	x	1

Lorsque le rapport est direct, on procède différemment. Par exemple, si 20 hommes ont fait 160 mètres en 15 jours, combien faudroit-il de jours à 30 hommes pour faire 192 mètres.

Hommes.	Mètres.	Jours.
20	160	15
30	192	x

Plus il y a d'hommes et plus ils font de mètres ; 20 hommes et 160 mètres sont en rapport direct. Ainsi après avoir multiplié l'une de ces quantités par 2, 3,.... il faudra multiplier aussi l'autre par le même nombre. Prenons 192 pour facteur de 20 hommes et 160 mètres ; puis 160 pour facteur de 30 hommes et 192 mètres, et il est clair que le nombre de mètres (*) sera dans les deux cas 192×160. On fera donc cette question ; si 20×192 hommes ont fait un ouvrage en 15 jours, combien de jours seraient 30×160 hommes à le faire. Cette règle est inverse et on a . . . .

(*) On auroit rempli le même but avec un facteur plus simple que 192 ; *voy.* ce qu'on a dit pour la réduction au même dénominateur (34) ; nous avons pris ici 192 pour mieux faire concevoir la conséquence qui suit.

$30 \times 160 : 15 :: 20 \times 192 : x = \frac{20.192.15}{30.160}$, ou . . .
$x = \frac{2.192.5}{1.160} = \frac{192}{16} = 12.$

On raisonnera de même dans tout autre cas ; et on voit comment en renversant le problême, on peut faire la preuve de l'opération. Voici encore un exemple assez compliqué.

Si 40 ouvriers ont fait 300 mètres en 8 jours, en travaillant 7 heures par jour ; combien 51 ouvriers seroient-ils de jours à faire 459 mètres en travaillant 6 heures par jour?

Hommes.	Mètres.	Jours.	Heures.
40	300	8	7
51	459	x	6

On verra d'abord que les ouvriers et les heures sont en rapport inverse ; on mettra donc 40×7 heures d'une part, et 51×6 heures de l'autre, durant un jour, ce qui donnera lieu à la question indiquée ci-contre, et qu'il est inutile d'énoncer.

Heures.	Mètres.	Jours.
40×7	300	8
51×6	459	x

Les heures et les mètres sont en rapport inverse ; on fera donc 459 multiplicateur des termes de la première période, 300 sera celui de la seconde ; ce qui réduira le nombre de mètres à être le même de part et d'autre. On aura donc une règle de trois inverse, qu'on posera ainsi . . . .

Heures.	Jours.
$40 \times 7 \times 459$	8
$51 \times 6 \times 300$	x

$51 \times 6 \times 300 : 8 :: 40 \times 7 \times 459 : x = \frac{40.7.459.8}{51.6.300}$; ou
$x = \frac{40.7.8}{2.100} = 11\frac{1}{5}.$

On peut encore éviter ces divers raisonnemens : car en les reproduisant sur chaque terme, comparé à l'inconnue, on verra aisément que *lorsque le rapport sera direct, le terme devra changer de place avec son homogène ;*

tandis que s'il forme un rapport inverse, on le laissera tel qu'il est. Enfin, on multipliera tous les nombres contenus dans chaque ligne, et on égalera les produits entre eux. Ainsi, dans la dernière question, les ouvriers et les jours sont en rapport inverse; ainsi que les heures et les jours: mais les mètres et les jours forment un rapport direct; on changera de place seulement 300 et 459; on formera le produit des nombres contenus dans chaque ligne, et égalant il viendra . . . $40 \times 459 \times 8 \times 7 = 51 \times 300 \times 6 \times x$ qui donne la même valeur que ci-devant (5).

$$\begin{array}{l} 40 \times 459 \times 8 \times 7 \\ 51 \times 300 \times x \times 6 \end{array}$$

Cette opération peut même s'appliquer aux règles de trois simples.

79. *Règle de société.* Trois associés ont mis dans le commerce, l'un 12000 fr., l'autre 8000 fr., le troisième 4000 fr. Ils ont gagné 5430 fr.; on demande de partager ce gain à raison de leurs mises.

La somme totale 24000 fr. a rapporté 5430 fr. On fera donc ces trois proportions.

$$\begin{array}{l} 24\,000 : 5430 \text{ ou } 2400 : 543 :: 12\,000 : x = 2715^{\text{fr.}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2400 : 543 :: 8\,000 : x = 1810 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2400 : 543 :: 4\,000 : x = 905 \end{array}$$

Soit encore proposé le problème suivant.

Trois négocians ont mis dans le commerce, savoir l'un 10000 fr. pendant 7 mois, l'autre 8000 pendant 5 mois, le troisième 4000 fr. pendant 20 mois; on demande quelle est la part de chacun dans le bénéfice de 1500 fr.

On remarquera que les mises et les tems sont en rapport inverse; en les multipliant respectivement, on retombe sur une règle de la première espèce. L'un des associés est supposé avoir mis 70000 fr., le second 40000 fr., le dernier 80000; les tems sont égaux. On trouvera

552,63.... fr. 315,79.... fr. 631,58.... fr. pour les gains respectifs.

80. *Règle d'intérêt.* Elle a pour but de trouver la somme due pour de l'argent prêté sous certaines conditions. Cet intérêt se stipule de deux manières : ou en indiquant celui que porte la somme de 100 fr., ce qu'on désigne par les mots 4, 5.... *pour cent* (on l'écrit ainsi, 5 p. $\frac{0}{0}$) : ou en fixant la somme qui doit rapporter un franc d'intérêt ; le *Denier* 14 signifie que 14 francs rapportent 1 franc.

La relation qui lie ces deux manières de stipuler l'intérêt se trouve par une proportion. Ainsi le denier 25 équivaut à 4 p. $\frac{0}{0}$, puisque si on pose cette règle de trois, si 25 *fr. rapportent* 1 *fr. quel est l'intérêt de* 100*r f.*; on trouve 4 fr. De même le denier 2 revient à 50 p. $\frac{0}{0}$., le denier 20 à 5 p. $\frac{0}{0}$ (*Voyez*, la scène 1re., acte II de l'*Avare* de Molière).

Un exemple de règles d'intérêt suffira pour montrer comment on doit résoudre toutes les questions semblables. Quel est l'intérêt de 10000 fr. à $\frac{1}{4}$ p. $\frac{0}{0}$ par mois durant 7 mois? Ce problème revient à celui-ci : si 100 fr. rapportent $\frac{1}{4}$ fr. durant un mois, combien 10000 fr. rapporteront-ils pendant 7 mois? Cette règle de trois composée se résout à l'ordinaire (78). On peut aussi la résoudre comme il suit : $100 : \frac{1}{4} :: 10000 : x = 25$ fr., intérêt de 10000 fr. pendant un mois ; 7×25 ou 175 fr. est donc l'intérêt cherché.

81. *Règle d'escompte.* Lorsqu'une somme n'est due qu'à une époque encore éloignée et qu'on en obtient sur-le-champ le paiement, on nomme *Escompte* l'intérêt qu'on perçoit pour cela. Si donc on a 10000 fr. à recevoir dans 7 mois, en retenant l'intérêt de cette somme à $\frac{1}{4}$ p. $\frac{0}{0}$ par mois on devra déduire 175 fr., et il restera 9825. Cette manière d'opérer s'appelle prendre *l'escompte*

en dehors; elle est la plus usitée, quoiqu'on retienne l'intérêt de 10000 fr. et qu'on ne paie en effet que 9825. fr.

Pour l'escompte *en dedans*, il ne faut retrancher que l'intérêt de la somme qu'on paie : voici ce qu'on doit faire. Chaque mois, on devra retenir $\frac{1}{4}$ fr. par 100 fr., donc après 7 mois, $100 + \frac{7}{4}$ fr. seront réduits à 100 fr. : on posera donc cette proportion, si $101\frac{3}{4}$ fr. sont réduits à 100 fr., à combien 10000 fr. seront-ils réduits? On trouve 9828 fr. $\frac{4}{407}$. En effet, si on ajoute à cette somme son intérêt à $\frac{1}{4}$ p. % par mois durant 7 mois, on retrouvera 10000 fr.

82. ***Règle conjointe.*** Prenons, pour expliquer cette règle, l'exemple suivant : 50 liv. de Paris valent 51 liv. de Hambourg, 25 de celles-ci en valent 24 de Francfort; on demande le rapport de la livre de Paris à celle de Francfort.

Puisque 50 livres de Paris = 51 livres de Hambourg, on a $\left(\frac{50}{51}\right)$liv. P. = 1 liv. H.; (les premières lettres P., H. F. désignent Paris, Hambourg, Francfort); on a de même 1 liv. H. $= \left(\frac{24}{25}\right)$ liv. F.; donc . . . . . . $\left(\frac{50}{51}\right)$ liv. P. $= \left(\frac{24}{25}\right)$ liv. F.; . . . . ou $50 \times 25^{\text{liv. P}} = 24 \times 51^{\text{liv. F.}}$, c'est le rapport cherché. On écrira donc les nombres donnés sous forme d'équations, comme on le voit ci-contre, *faisant en sorte que le second membre de la première équation soit de même nature que le premier membre de la seconde*; il ne restera plus qu'à multiplier terme à terme ces équations, en conservant au premier membre la première espèce d'unités, et au second membre la dernière.

$$50^{\text{liv. P}} = 51^{\text{liv. H.}}$$
$$25^{\text{liv. H.}} = 24^{\text{liv. P.}}$$

On peut donner un plus grand nombre de rapports qui s'enchaînent. Quel est, par exemple, le rapport du mètre à la verge d'Angleterre, sachant que 9 verges valent 7 aunes de France, et que l'aune vaut 1,1884 mètres? On prendra pour premier terme de la règle conjointe 9 verges, qui est de l'espèce cherchée, et on posera 9 verges = 7 aunes; ensuite on écrira les autres rapports en observant la règle ci-dessus, et on réduira les deux premiers rapports en un seul 9×1 verge $= 7 \times 1{,}1821$ mètres. On posera ensuite 1 mètre $= x$ verges, et on verra qu'en les réduisant de même on a $9 \times 1 \times 1$ verge $= 7 \times 1{,}1821 \times x$ mètres, ce qui revient à multiplier encore les trois équations terme à terme; on a donc 9 verges $= 8{,}2747$ fois l'inconnue x, d'où $x = \frac{9}{8{,}2747}$, (5), et enfin. . . .

$$9^{\text{v.}} = 7^{\text{aun.}}$$
$$1^{\text{aune}} = 1{,}1821^{\text{m.}}$$
$$1^{\text{m.}} = x$$

$x = 1{,}087$ verges $= 1$ mètre.

On remarquera que le premier terme et le dernier x étant de même espèce, les deux membres remplissent aussi la même condition après la multiplication, les termes intermédiaires étant des nombres abstraits; aussi dans l'équation finale les deux membres sont ramenés à la même unité, ce qui est toujours nécessaire.

Voici une dernière question. Combien 100 pistoles d'Espagne valent-elles de francs, sachant que 1 ducat d'Espagne vaut 95 deniers de gros d'Amsterdam; que 34 sous de gros valent 1 livre sterling de Londres; et que 32 deniers sterlings valent 3 francs? On sait d'ailleurs que la pistole d'Espagne vaut 1088

$$3^{\text{fr.}} = 32^{\text{d. st.}}$$
$$240^{\text{d. st.}} = 1^{\text{liv. st.}}$$
$$1^{\text{liv. st.}} = 34^{\text{s. gr.}}$$
$$1^{\text{s. gr.}} = 12^{\text{d. gr.}}$$
$$95^{\text{d. gr.}} = 1^{\text{duc.}}$$
$$1^{\text{duc.}} = 375^{\text{mar.}}$$
$$1088^{\text{mar.}} = 1^{\text{pi.}}$$
$$100^{\text{pist.}} = x^{\text{fr.}}$$

maravédis, dont il en faut 375 pour un ducat; la livre de gros et la livre sterling valent 20 sous de 12 deniers chaque. On trouve $x = \frac{3.240.95.1088.100}{32.34.12.375}$, qui se réduit à $x = 4 \times 19 \times 20$; ainsi 100 pistoles valent 1520 fr. Cette opération, connue sous le nom d'*Arbitrage*, est souvent usitée dans les changes.

3. *Des Progressions.*

83. Une suite de termes dont chacun surpasse celui qui précède, ou en est surpassé, de la même quantité, est ce qu'on appelle une *Progression par différence :* tels sont les nombres 1, 4, 7, 10,...... On l'indique ainsi ÷1.4.7.10.13.16,..... la raison est ici 3.

Il est clair que le second terme est égal au premier plus la raison; le troisième au second plus la raison, c'est-à-dire, au premier plus 2 fois la raison; le quatrième est de même composé du premier plus 3 fois la raison : etc. En général, *un terme quelconque d'une progression par différence est composé du premier plus la raison répétée autant de fois qu'il y a de termes qui précèdent.* Donc

1°. On peut trouver un terme quelconque d'une progression sans calculer tous ceux qui précèdent. C'est ainsi que notre 100e. terme est $= 1 + 3 \times 99$ ou 298.

2°. Pour insérer entre 4 et 32, six moyens proportionnels par différence; c'est-à-dire, *pour lier ces deux nombres par* 6 *autres intermédiaires qui forment une progression composée de* 8 *termes*; je remarque que le dernier terme 32 de la progression étant égal au premier 4, augmenté de la raison prise 7 fois, 32 — 4 ou 28 est 7 fois la raison inconnue; donc la raison $= \frac{28}{7} = 4$, (5). En général, pour insérer entre deux nombres donnés, des moyens propor-

tionnels par différence, *on divisera la différence de ces quantités, par le nombre de moyens plus un; le quotient sera la raison.* La progression ci-dessus est . . . . ÷ 4.8.12.16.20.24.28.32.

De même, pour insérer huit moyens entre 4 et 11, on trouve la raison $= \frac{11 - 4}{9} = \frac{7}{9}$; la progression est ÷ $4 . 4\frac{7}{9} . 5\frac{5}{9} . 6\frac{3}{9} . 7\frac{1}{9} . 7\frac{8}{9} . 8\frac{6}{9} . 9\frac{4}{9} . 10\frac{2}{9} . 11$.

84. Une progression par quotient est une suite de termes dont chacun contient celui qui le précède, ou est contenu en lui, le même nombre de fois. Telle est la suite ∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96.... ; la raison est 2.

Le second terme est égal au premier multiplié par la raison; le troisième est égal au second multiplié par la raison, et par conséquent au premier multiplié par le carré de la raison; de même, le 4e. est le produit du 1er. par le cube de la raison, etc. En général, *un terme quelconque d'une progression par quotient est le produit du premier par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent.* On peut donc

1°. Calculer la valeur d'un terme, sans être obligé de passer par tous ceux qui le précèdent. Le dixième terme de notre progression ci-dessus est $3 \times 2^9 = 3 \times 512 = 1536$.

2°. Insérer entre deux nombres donnés, des moyens proportionnels? Par exemple pour avoir huit moyens entre 3 et 1536, je remarque que le dernier terme 1536 de la progression étant égal au premier 3, multiplié par la raison élevée à la puissance 9, si on divise 1536 par 3, le quotient 512 est la 9e. puissance de la raison : d'où la raison $= \sqrt[9]{512} = 2$, (60). Donc, *pour insérer entre deux nombres donnés des moyens proportionnels, il faut prendre leur quotient et en extraire une racine d'un degré*

égal au nombre de moyens plus un : cette racine sera la raison.

Cette extraction de racines est une opération assez difficile; mais bientôt elle ne sera plus qu'un jeu, à l'aide des belles propriétés des logarithmes. Pour insérer quatre moyens entre 8 et 64, il faudroit extraire la racine 5e. de $\frac{64}{8}$ ou $\sqrt[5]{8}$, quantité irrationnelle (63); on ne peut donc assigner exactement en nombres ces moyens; mais on en approche autant qu'on veut. On verra bientôt que $\sqrt[5]{8} = 1,5157$, c'est la raison. La progression cherchée est

$$\div\!\!\div 8 : 12,1257 : 18,3792 : 27,8576 : 42,2243 : 64.$$

Voyez à ce sujet (153, 10°).

4. *Des Logarithmes.*

85. Concevons deux progressions, l'une par quotient, l'autre par différence, dont les termes se répondent deux à deux, telles que

$\div\!\!\div$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187...... *Nombres.*
$\div$ 0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 ...... *Logarithmes.*

Chaque terme de la seconde est le *Logarithme* du nombre correspondant de la première, 0 est le logarithme de 1, 2 l'est de 3; 4 de 9; 6 est le logarithme de 27 : etc. *Les logarithmes sont donc des nombres en progression par différence qui répondent terme à terme à d'autres nombres en progression par quotient.*

Comme les logarithmes n'offrent d'utilité qu'en vertu de propriétés qui supposent que ces progressions commencent l'une par 1, l'autre par zéro, nous ne nous occuperons que de celles qui remplissent cette condition. Nous avons vu que les multiplications et divisions qu'on

pratique dans certains cas sur les nombres de la première progression, répondent à des additions et soustractions dans la seconde ; on peut prévoir que les logarithmes faciliteront beaucoup les calculs. C'est ce que nous verrons mieux dans un instant.

86. *Propriétés des logarithmes.* Il suit de ce qu'on a dit (83 et 84), et de ce que nos progressions commencent l'une par un, l'autre par zéro, qu'un terme quelconque est formé de la raison, autant de fois facteur pour la première, et autant de fois ajoutée, pour la seconde, qu'il y a de termes avant lui. Les sixièmes termes, par exemple, sont 243 et 10 ; dans l'un, la raison 3 est élevée à la puissance 5, et dans l'autre la raison 2 est ajoutée 5 fois. Ainsi, *la raison est autant de fois facteur dans un terme de la première, qu'elle est de fois ajoutée dans son correspondant.*

Si on multiplie entre eux deux termes de la progression par quotient, tels que 9 et 243, la raison 3 sera 7 fois facteur dans le produit, parce qu'elle l'est 2 fois dans 9 et 5 fois dans 243 ; le produit 9×243 ou 2187 sera donc le huitième terme de la première progression. Mais si on ajoute les termes 4 et 10 correspondans dans la progression par différence, la raison 2 sera aussi 7 fois ajoutée dans la somme 14 ; donc le produit 2187, et la somme 14 seront des termes correspondans : ce qui s'exprime en disant que *la somme des logarithmes de deux nombres est le logarithme de leur produit.*

Il suit de là que le double du logarithme d'un nombre, est le logarithme du carré de ce nombre ; le triple est le logarithme du cube ; et en général, *en multipliant le logarithme d'un nombre par un facteur quelconque*, on aura *le logarithme de la puissance de ce nombre marquée par ce facteur.* Pour 9^3, on a $3 \times 4 = 12$ qui répond à $729 = 9^3$.

87. Les inverses de ces opérations sont faciles à démontrer; car le logarithme du quotient plus celui du diviseur devant donner celui du dividende; il s'ensuit que *le logarithme du quotient de deux nombres, est la différence des logarithmes de ces nombres.*

De même aussi, *le logarithme de la racine quelconque d'un nombre, est le quotient du logarithme de ce nombre divisé par le degré de cette racine.*

88. Si, au lieu de prendre 3, on eût choisi pour raison de la progression par quotient une quantité beaucoup plus petite, les nombres dont elle est composée auroient été plus près les uns des autres, et on y auroit trouvé par approximation 1, 2, 3, 4, 5..... Concevons donc qu'on ait formé une table dans laquelle on auroit inscrit ces nombres et leurs logarithmes, en supprimant d'ailleurs tous les autres termes intermédiaires : les principes qu'on vient de démontrer auroient également été vrais. Supposons cette table formée : on voit que

1°. Pour multiplier deux nombres donnés, il suffit de prendre dans la table leurs logarithmes, de les ajouter et de chercher la somme parmi les logarithmes : le nombre correspondant est le produit cherché.

2°. Pour diviser deux nombres, on retranchera le logarithme du diviseur de celui du dividende; on cherchera le reste parmi les logarithmes; le nombre correspondant sera le quotient demandé.

3°. Pour faire une règle de trois, on ajoutera les logarithmes des moyens, on en retranchera celui de l'extrême connu, le nombre répondant au résultat sera l'inconnue.

4°. Pour obtenir le logarithme d'une fraction, on retranchera le logarithme du dénominateur de celui du numérateur, le reste sera le logarithme demandé. Les

tables ne contiennent que les logarithmes des nombres entiers ; ce théorème en étend l'usage aux fractions (91, 1°).

5°. Pour élever un nombre à une puissance, on multipliera son logarithme par le degré de la puissance ; on cherchera le produit parmi les logarithmes, il répondra à la puissance demandée.

6°. Pour extraire une racine d'un nombre, on divisera le logarithme de ce nombre par le degré de la racine, et on cherchera le quotient parmi les logarithmes ; le nombre qui s'y rapporte sera la racine cherchée.

On voit donc que les calculs les plus compliqués ne sont maintenant qu'un jeu, pour ainsi dire : les multiplications et divisions sont remplacées par des additions et soustractions ; les élévations de puissances et les extractions de racines sont réduites à des multiplications et des divisions. Ces simplifications sont dues à NÉPER, célèbre géomètre écossais, inventeur des logarithmes, et dont la mémoire doit être chère à tous les amis des sciences.

89. *Formation des tables.* Il s'agit maintenant d'expliquer comment on peut obtenir les logarithmes de tous les nombres entiers. Jusqu'ici, nos progressions par différence et par quotient ont été quelconques l'une et l'autre, de sorte qu'un même nombre a une infinité de logarithmes. Nous verrons bientôt la raison qui a fait préférer les suivantes

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10 000 : . . . . *Nombres.*
÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . . . . . *Logarithmes.*

0, 1, 2..... sont les logarithmes de 1, 10, 100,..... et il s'agit de trouver ceux de 2, 3, 4,... qui sont visiblement compris entre 0 et 1 ; ceux de 11, 12,..... 99 sont entre 1 et 2, etc. On ne peut obtenir ces logarithmes que par approximation ; on se contente ordinairement de 7 décimales.



Observons que si, dans une progression, telle que ÷ 0.2.4.6.8.10.... on omet un terme sur 2 consécutifs, ou 2 sur 3,..... on formera d'autres progressions . . . . ÷ 0.4.8.12....., ou ÷ 0.6.12..... On peut donc imaginer qu'au lieu de celles ci-dessus, on en avoit pris d'autres dont les termes étoient beaucoup plus voisins entre eux, et dont ceux-là faisoient seulement partie.

Ainsi, concevons qu'on ait inséré entre 1 et 10 un très-grand nombre de moyens proportionnels par quotient; comme on monte alors de 1 à 10 par des degrés très-serrés, il arrivera que, parmi ces moyens, on rencontrera les nombres 2, 3, 4,.... aux dix-millionnièmes près. Cela posé, si on insère un pareil nombre de moyens par différence entre 0 et 1; ceux de ces moyens qui occuperont le même rang que 2, 3, 4,..... seront les logarithmes de ces nombres. On raisonnera de même de 10 à 100, etc.

Il est vrai que, pour insérer un grand nombre de moyens par quotient, il faudroit extraire une racine d'un degré très-élevé (84); mais on évite cette difficulté à l'aide de diverses racines carrées successives. Par exemple, cherchons le logarithme de 3 : le moyen par quotient entre 1 et 10 est..... 3,16227766 et par différence entre 0 et 1 est 0,5; 0,5 est donc le logarithme de 3,1622...., nombre déja voisin de 3. Une pareille opération pour 1 et 3,1622... d'une part et pour 0 et 0,5 de l'autre, donne 0,25 pour le logarithme de 1,77827941. De même entre 1,7782... et 3,1622.... d'une part; et entre 0,25 et 0,5 de l'autre on trouve pour moyens 2,37137370 et 0,375. En continuant de resserrer ainsi ces limites, on trouvera. . . . 0,30102999 et 0,47712125 pour logarithmes de 2 et 3.

Ces calculs sont très-pénibles; il est vrai qu'on n'est obligé de les pratiquer que pour les nombres premiers;

puisque les autres logarithmes s'en déduisent. Mais malgré cela, il en reste assez pour lasser la patience la plus persévérante. Aussi n'avons-nous présenté ce procédé que comme un moyen de concevoir la formation des tables, nous réservant d'en donner de plus expéditifs (575).

90. Il est aisé maintenant d'expliquer pourquoi on a attribué la préférence aux deux progressions précédentes. Tout logarithme est formé d'une partie entière, qu'on nomme *Caractéristique*, et d'une fraction décimale : or,

1°. Les logarithmes des nombres compris entre 1, 10, 100,... sont compris eux-mêmes entre 0, 1, 2,... c'est-à-dire que *le logarithme de tout nombre a pour caractéristique autant d'unités que le nombre a de chiffres entiers moins un ;* ce qui permet de fixer ce nombre de chiffres, lorsque la caractéristique est donnée, et réciproquement. Le nombre 543,21 a 2 unités entières à son logarithme : et 3,4771225 est le logarithme d'un nombre dont la partie entière a quatre chiffres. On évite souvent de charger les tables de cette caractéristique qui y est inutile.

2°. Lorsqu'on veut multiplier ou diviser un nombre par 10, 100, 1000,.... il faut ajouter ou ôter à son logarithme 1, 2, 3... unités, d'où il suit qu'augmenter ou diminuer la caractéristique de 1, 2, 3..., c'est multiplier ou diviser le nombre correspondant par 10, 100,..... c'est ajouter 1, 2, 3....... zéros ou les supprimer, enfin c'est reculer la virgule de 1, 2, 3... rangs à droite ou à gauche. Les logarithmes des nombres 3,4578; 34,578; 345,78; ont la même partie décimale; seulement les caractéristiques sont respectivement 0, 1, 2,....

Quand nous voudrons dire qu'une quantité est un logarithme tabulaire, nous l'indiquerons par le signe L; en réservant la notation *Log.* pour le cas où le système seroit arbitraire et indéterminé.

91. *Usage des tables.* Il faut avoir des tables de logarithmes entre les mains pour en concevoir l'usage ; celles de Callet, de Borda et Delambre sont les plus usitées. Nous n'entreprendrons pas ici d'expliquer leur usage ; mais il est quelques points qui tiennent à la doctrine même et qu'il est bon d'éclaircir.

1°. Les logarithmes des nombres < 1, présentent une difficulté : en général, (88, 4°) il faut retrancher le logarithme du dénominateur de celui du numérateur pour avoir celui d'une fraction : mais lorsqu'elle est moindre que un, la soustraction devient impossible. Par exemple, pour multiplier 5 par $\frac{3}{4}$, comme cela équivaut à diviser 5 par $\frac{4}{3}$, il est indifférent d'ajouter $L\,\frac{3}{4}$ à $L\,5$ ou de retrancher $L\,\frac{4}{3}$ de $L\,5$; c'est alors cette dernière opération qu'on préfère. On voit donc qu'il faut soustraire le logarithme du numérateur de celui du dénominateur, mais qu'il faut employer ce logarithme en sens inverse ; c'est-à-dire le soustraire s'il falloit l'ajouter, et réciproquement. On donne le nom de *logarithmes négatifs* à ces valeurs, parce qu'on les distingue par le signe — qu'on place devant.

Un peu d'attention suffit pour éviter les erreurs. Voici divers exemples propres à faciliter l'intelligence de ces calculs.

$$1^\circ.\ x = \frac{42,212 \times \frac{3}{5}}{0,04}\ ;\ 2^\circ.\ x = \sqrt{\tfrac{5}{7}}\ ;\ 3^\circ.\ x = \frac{\sqrt[3]{0,00027}}{32,41}.$$

Première opération.

$L5=$	0,6989700	$L100=$	2,0000000	
$L3=$	0,4771213	$L4=$	0,6020600	
$L\frac{3}{5}=$	$-0,2218487$	$L0,04=$	$-1,3979400$	
$L42,212=$	1,6254359		1,4035872	
	1,4035872	$Lx=$	2,8015272	$x=633,18$

Deuxième opération.

Pour trouver le nombre qui répond à re logarithme négatif, on le retranche de 1, ce qui rend le nombre 10 fois plus grand; on a 0,9269360 qui répond à 8,4515; donc $x = 0{,}84515$.

$$\begin{aligned} L5 &= 0{,}6989700 \\ L7 &= \underline{0{,}8450980} \\ L\tfrac{5}{7} &= -0{,}1461280 \\ Lx &= -0{,}0730640 \end{aligned}$$

Troisième opération.

On retranche de 3 ce logarithme Lx, ce qui rend le nombre 1000 fois plus grand; on a 0,2997756, qui répond à 1,9942; donc $x = 0{,}0019942$.

$$\begin{aligned} L\,100000 &= 5{,}0000000 \\ L\,27 &= \underline{1{,}4313638} \\ L\,0{,}00027 &= -3{,}5686362 \\ & -1{,}1895454 \\ L\,32{,}41 &= 1{,}5106790 \\ Lx &= -2{,}7002244 \end{aligned}$$

2°. L'attention qu'exige le calcul des logarithmes négatifs détermine à leur préférer ceux dont la *caractéristique seule est négative* : ainsi pour obtenir $L\frac{3}{5} = L3 - L5$, on rendra la soustraction possible en ajoutant 1 à la caractéristique du logarithme de 3; mais il faudra soustraire 1 de l'excès, et on aura $L\frac{3}{5} = -1 + 0{,}7781513$, qu'on écrit ainsi $\bar{1},7781513$: la caractéristique seule étant négative, pour marquer que dans le calcul où on fera entrer ce logarithme, on se réserve de soustraire cette unité. Pareillement $L0{,}04 = L4 - L100 = L4 - 2 = \bar{2},6020600$. On voit combien cette méthode donne de facilité pour les fractions décimales. Les calculs précédens deviennent par là

$L\frac{3}{5} = \bar{1},7781513$	$L5 = 0{,}6989700$	$L\,0{,}00027 = \bar{4},4313638$
$L\,42{,}212 = \underline{1{,}6254359}$	$L7 = \underline{0{,}8450980}$	on ajoute et on soustrait 2, on prend le tiers. . . . .
$1{,}4035872$	$L\frac{5}{7} = \bar{1},8538720$	$\bar{2},8104546$
$L0{,}04 = \underline{\bar{2},6020600}$	on ajoute et on ôte 1, on prend la moitié.	$L\,32{,}41 = \underline{1{,}5106790}$
$Lx = 2{,}8015272$	$Lx = \bar{1},9269360$	$Lx = \bar{3},2997756$

On arrive ainsi aux mêmes résultats. Remarquez que dans les deux derniers exemples, lorsqu'on a eu à diviser un logarithme affecté d'une caractéristique négative, on l'a d'abord rendue divisible en ajoutant un nombre d'unités convenable. Ainsi, pour prendre $\frac{1}{2}\,L\,\frac{5}{7}$, on a mis $L\,\frac{5}{7}$ sous la forme $-\,2+1,8538720$. On ne doit pas négliger cette précaution.

3°. On abrège beaucoup les opérations par l'emploi des *Complémens*; le calcul ci-contre se rapporte au 1er. exemple ci-dessus : pour prendre le logarithme de $\frac{3}{5}$, on a ajouté $L\,3$ au complément de $L\,5$ (*voy*. n°. 10).

$$\begin{aligned} L\,3 &= 0,4771213 \\ C^{t}.\ L\,5 &= \bar{1},3010300 \\ L\,42,212 &= 1,6254359 \\ C^{t}.\ L\,0,04 &= 1,3979400 \\ \hline L\,x &= 2,8015272 \end{aligned}$$

4°. Il convient de simplifier les expressions avant d'y appliquer le calcul logarithmique; ainsi, notre premier exemple se réduit à $x=\dfrac{3.422,12}{2}$; et si nous avons préféré traiter la formule comme nous l'avons fait, c'étoit seulement pour mieux faire voir le jeu des logarithmes négatifs.

5°. Soit demandé le logarithme d'un nombre qui excède les limites des tables : c'est ce qui a lieu, par exemple, pour celles de Callet, qui ne vont que jusqu'à 108 milles, lorsqu'on veut le logarithme de 5487344. On cherchera d'abord le logarithme de 54873,44 dont la partie décimale est la même, et pour cela, comme au logarithme de 54873 correspond dans la table 7393587, on fait alors cette proportion :

1 (*diff. entre les nombres*) *est à* 79 (*diff. entre les log. de* 54873 *et* 54874) *comme* 0,44 (*diff. entre* 54873 *et* 54873,44) *est à* x; d'où $x=0,44\times 79=35$ qu'on ajoute à la partie décimale de L 54873, et on a 7393622 :

il est inutile de remarquer que 79 et 35 tiennent lieu dans notre proportion, de 0,0000079 et de 0,0000035. Il ne reste plus qu'à mettre la caractéristique convenable, d'après la place de la virgule dans le nombre proposé.

Cette règle de trois, qui suppose que les nombres croissent proportionnellement à leurs logarithmes, est visiblement fausse : mais les nombres 1, 10, 100..... ayant 0, 1, 2,... pour logarithmes, ceux des nombres de 1 à 10, de 10 à 100,..... se partagent inégalement entre eux une unité ; d'où il suit que plus les nombres sont grands et moins les logarithmes consécutifs diffèrent. Les nombres de cinq chiffres doivent donc avoir pour leurs logarithmes une même différence, du moins durant une certaine étendue, et en se bornant à 7 décimales ; aussi voit-on dans la table, qu'environ 100 nombres consécutifs, voisins de 54873, ont 79 pour différence logarithmique.

6°. Pour trouver le nombre qui répond au logarithme $\bar{1},7393622$, on voit d'abord qu'il tombe entre les nombres 54873 et 54874 ; et que la différence entre ce logarithme et celui de 54873 est 35 : ainsi, en supposant 8 unités entières à la caractéristique du logarithme proposé, il répond à 54873 augmenté d'une fraction, qu'on obtient en renversant la proportion ci-dessus. On a donc $\frac{79}{1}=\frac{35}{x}$, d'où $x=\frac{35}{79}=0,44$; et $\bar{1},7393622$ est le logarithme de 0,5487344.

LIVRE SECOND.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

CHAPITRE PREMIER.

CALCULS ALGÉBRIQUES.

1. *Notions générales.*

92. On ne considère en arithmétique que les grandeurs qui sont données par des nombres ; mais lorsqu'on veut conserver aux quantités une forme générale qui puisse convenir à toutes les valeurs, et que pour cela on les représente par des lettres $a\,b\,c\ldots$, elles deviennent du domaine de L'ALGÈBRE. Le but est alors moins de combiner des nombres pour en déduire le résultat, que d'obtenir des traces du calcul qui le donne, afin de le simplifier et d'en tirer des règles qui conviennent à tous les cas d'une même question, quels que soient les nombres qui y sont donnés. Cherchons, par exemple, le nombre dont le triple soit égal à la moitié de ce nombre ajoutée à 100. Voici comment on raisonnera

3 *fois l'inconnue égale* 100 *plus la moitié de l'inconnue*
retranchant de part et d'autre la moitié de l'inconnue
3 *fois l'inconnue moins sa moitié égale* 100
d'où $\frac{5}{2}$ *fois l'inconnue égale* 100
et divisant (5) par $\frac{5}{2}$, ou multipliant par $\frac{2}{5}$,
l'inconnue égale $\frac{2}{5}$ *de* 100 ou 40.

Au lieu de cela, l'algébriste représentera l'inconnue par x et traduira ainsi ces raisonnemens,

$3x = 100 + \frac{1}{2}x$, $3x - \frac{1}{2}x$ ou $\frac{5}{2}x = 100$, $x = \frac{2}{5}100 = 40$, et s'il met a au lieu de 100, il aura

$$3x = a + \frac{1}{2}x, \quad 3x - \frac{1}{2}x \text{ ou } \frac{5}{2}x = a, \quad x = \frac{2}{5}a.$$

Il verra donc que le nombre dont le triple est égal à sa moitié ajoutée à une quantité donnée, quelle qu'elle soit, est les $\frac{2}{5}$ de cette quantité. (*Voy.* pages 122 et 124).

La manière de démontrer les théorêmes peut encore différer beaucoup en algèbre et en arithmétique. Veut-on prouver une proposition? On prendra en arithmétique un exemple numérique quelconque, et on procédera de manière à conclure que le principe a lieu, non-seulement pour l'exemple individuel sur lequel on a opéré, mais encore pour tout autre. On fera donc un *raisonnement général sur un exemple particulier.* En algèbre, au contraire, on prendra un exemple formé de symboles assez généraux pour les représenter tous, on pourra raisonner d'une manière qui lui soit particulière, et souvent les combinaisons seront purement mécaniques. C'est ce que la suite expliquera mieux (104).

93. Convenons donc de représenter les quantités connues par des lettres a, b, c..., ou ceux des nombres donnés qui servent de base à ces raisonnemens et de la grandeur desquels nous voulons rester maîtres de disposer ensuite. Si s est la somme des quatre nombres a b c et d, nous écrirons $s = a + b + c + d$.

$s = a + a + a + a$, se réduit à $s = 4 \times a$, ou simplement $= 4a$, en ôtant le signe de la multiplication, qui devient inutile. Le chiffre 4 se nomme *Coefficient* (*).

(*) On doit bien se garder de confondre les exposans avec les coefficiens, a, par exemple, avec $4a$: les exposans indiquent la multiplication réitérée d'une quantité par elle-même; les coefficiens



Si le nombre a doit être répété 2, 5, 7..... n fois, on écrira $2a$, $5a$, $7a$...... na. De même $a \times a = a^2$; on désigne par a^5 a^7.... a^n que a est 5, 7.... n fois facteur.

On nomme *Terme* toute quantité séparée d'une autre par le signe + ou — ; le *binome* a deux termes, tels sont $a + b$, $ac - 4ab$; le *trinome* trois, tels que $a + b - c$, $ad - 4ab - 2bc$; le *polynomé* enfin a plusieurs termes dont on ne désigne pas le nombre.

Le trinome $a - b - c$ désigne qu'après avoir ôté b de a, il faudra encore retrancher c du reste ; ce qui revient à $a - (b + c)$; $a - b - b$ est visiblement égal à $a - 2b$; de même $a - b - 3b - 2b = a - 6b$.

2. *De la Réduction, l'Addition et la Soustraction.*

94. On appelle *Réduction* l'opération algébrique qui tend à réunir plusieurs termes en un seul : mais il faut pour cela qu'ils ne diffèrent que par les signes et les coefficiens, et qu'ils soient formés des mêmes lettres affectées des mêmes exposans. $3a - 2ab - b$, $3a^2 - 2a$, $5a^3b^2 + 2a^2b^3 - 3b^2$, sont des quantités irréductibles. On verra aisément que

$$3abc^2 - abc^2 + bc^3 - 2bc^3 + a^2d^2 = 2abc^2 - bc^3 + a^2d^2$$
$$2a - 3b + a - c + 3b = 3a - c$$
$$3b + 2ac - 5b - 3ac + ac + d = d - 2b.$$

En général, on *ne prend d'abord que deux termes semblables, et la réduction ne frappe que leurs coefficiens, c.-à-d., qu'on les ajoute lorsque leurs signes sont les mêmes, et qu'on les retranche s'ils sont différens : on donne ensuite au résultat le signe commun dans le* 1[er]. *cas ; et*

---

en marquent l'addition, $a^4 = a.a.a.a$, $4a = a + a + a + a$: si a représente le nombre 5, $a^4 = 625$ et $4a = 20$.

le signe du plus grand coefficient dans le second. Les lettres et leurs exposans demeurent d'ailleurs les mêmes.

On doit attribuer le coefficient 1 aux termes qui n'en sont pas pourvus ; de sorte que b et ac soient remplacés par $1b$ et $1ac$.

A proprement parler, il n'y a en algèbre ni addition ni soustraction, mais bien une réduction lorsqu'elle est possible ; l'addition et la soustraction restent encore à exécuter dans $a+b$ et $a-b$.

Ainsi pour faire l'addition ci-contre, on n'éprouvera d'autre embarras que celui de la réduction après avoir attribué aux premiers termes le signe $+$.

$$\begin{array}{r} 3a^2+5bc-2c^2 \\ 7a^2-3bc+4d \\ a^2-4bc+2c^2 \\ \hline 11a^2-2bc+4d \end{array}$$

95. Proposons-nous de soustraire $b-c$ de a ; il est certain qu'on ne changera pas la différence cherchée, en ajoutant c à ces deux nombres ; ainsi

$$a-(b-c) \text{ équivaut à } a+c-b.$$

On voit en effet que si on ajoute (4), $a+c-b$ à $b-c$, on retrouve a. Donc, *pour soustraire un polynome il faut en changer tous les signes, et réduire, s'il y a lieu.* Par exemple,

$$\begin{array}{ccc} 4ab-3bc & 4ab-3c^2+bc & 5a^2-3ac \\ -(2ab-6bc) & -(ab-c^2-2bc) & -(2a^2-3ac) \\ \hline 4ab-3bc & 4ab-3c^2+bc & 5a^2-3ac \\ -2ab+6bc & -ab+c^2+2bc & -2a^2+3ac \\ \hline 2ab+3bc & 3ab-2c^2+3bc & 3a^2 \end{array}$$

On remarquera que malgré que le premier terme ne porte souvent aucun signe, il faut alors lui attribuer le signe $+$, afin de rendre applicable la règle ci-dessus à ce terme comme aux autres. C'est ce qu'on fera aussi



dans la multiplication et la division, d'après le même motif.

3. *De la Multiplication.*

96. La multiplication présente deux cas : celui des monomes ne donne lieu à aucune difficulté ; car soit $4ab \times 5cd$, en changeant l'ordre des facteurs, on a $4.5.ab.cd$ ou $20\,abcd$; s'il y a des exposans comme $a^2 \times a^3$, en revenant aux principes, on trouve $aa \times aaa$ ou $aaaaa = a^5$, de sorte qu'on a ajouté les exposans 2 et 3 : de même $8a^2b^3 \times 4a^5b = 32\,a^7b^4$. En général, *pour multiplier des monomes, on multipliera leurs coefficiens, on ajoutera les exposans qui affectent les mêmes lettres ; enfin, on écrira à la suite les unes des autres les lettres différentes. On attribue l'exposant* 1 *aux lettres qui n'en ont pas.*

$$\begin{array}{r} a + b \\ c + d \\ \hline ac + bc \\ + ad + bd \end{array}$$

Multiplions maintenant $a+b$ par $c+d$, ce qu'on indique par $(a+b)\ (c+d)$: Il est évident que pour répéter $a+b$ autant de fois qu'il y a d'unités dans $c+d$, il faut prendre $a+b$, c fois, puis d fois, et ajouter. Mais aussi pour prendre c fois $a+b$, il faut multiplier séparément a et b par c, de sorte que . . . $(a+b) \times c = ac + bc$, $(a+b) \times d = ad + bd$, ce qui donne le produit $ac + bc + ad + bd$.

$$\begin{array}{r} a - b \\ c - d \\ \hline ac - bc \\ - ad + bd \end{array}$$

Pour multiplier $a - b$ par $c - d$, on multipliera d'abord $a - b$ par c. En prenant le produit ac de a par c, on est supposé avoir ajouté c fois a ; mais il falloit multiplier $a - b$ par c : on voit que chaque fois qu'on a ajouté a, on a pris une quantité trop grande de b unités, de sorte que le produit ac doit être diminué de b pris autant de fois qu'on a répété a,

ou c fois. Otons donc bc de ac, et nous aurons . . . . $(a-b)\,c=ac-bc$.

Mais au lieu de répéter c fois $a-b$, il ne falloit prendre $a-b$ que $(c-d)$ fois : on a donc pris d fois de trop $(a-b)$; ainsi du produit précédent $ac-bc$, il faut retrancher celui de $a-b$ par d, ou $ad-bd$, ce qui donne (95) $(a-b)\,(c-d)=ac-bc-ad+bd$.

La multiplication de tout polynome peut toujours être ramenée à ce dernier cas, en représentant par a et c les sommes des termes positifs de chaque facteur, et par b et d celle des négatifs ; on retombe ensuite sur le premier exemple. Mais en suivant ce qui vient d'être développé, on verra que chaque terme du multiplicande a été multiplié séparément par chacun de ceux du multiplicateur : en outre quand les deux facteurs partiels monomes ont eu des signes différens, leur produit a eu le signe $-$, tandis que dans le cas contraire on a mis le signe $+$.

Concluons de là que *le produit de deux polynomes se trouve en multipliant chaque terme de l'un par tous ceux de l'autre, en suivant la règle donnée pour les monomes; puis en prenant chaque produit partiel négativement lorsque ses facteurs ont des signes contraires, et positivement lorsqu'ils ont de mêmes signes* (tous deux $+$ ou tous deux $-$) (*). On doit affecter les premiers termes du signe $+$, lorsqu'ils n'en portent aucun, comme n°. 95.

(*) On a coutume de dire que la multiplication comporte 4 règles, pour les coefficiens, les lettres, les exposans et les signes. Les premières ont été données pour les monomes : la quatrième s'énonce ainsi $+\times+=+$, $+\times-$ ou $-\times+=-$, $-\times-=+$. Il semble alors étrange aux oreilles peu faites au langage algébrique d'entendre dire que $-\times-$ donne $+$; l'espèce de doute qu'on



97. Voici quelques exemples de la multiplication des polynomes :

$$\begin{array}{l} a + 3c - d \\ 2a - d \\ \hline 2a^2 + 6ac - 2ad \\ - ad - 3cd + d^2 \\ \hline 2a^2 + 6ac - 3ad \\ - 3cd + d^2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2a + bc - 2b^2 \\ 2a - bc + 2b^2 \\ \hline 4a^2 + 2abc - 4ab^2 \\ - 2abc - b^2c^2 + 2b^3c \\ + 4ab^2 + 2b^3c - 4b^4 \\ \hline 4a^2 - b^2c^2 + 4b^3c - 4b^4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \\ \hline \end{array}$$

Ces exemples nous fournissent des remarques intéressantes.

1°. Le carré de $(a+b)$ est $a^2 + 2ab + b^2$, comme n°. 61.

2°. Le cube de $a + b$ est $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ comme n°. 67.

3°. De $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, on conclut que *la somme de deux quantités multipliée par leur différence,*

éprouve tient au vice du langage, car il est absurde de prétendre multiplier un signe par un autre; il ne faut donc pas attacher un sens rigoureux aux termes dont on se sert, qui ne sont obscurs que parce qu'on sacrifie la correction de l'énoncé au besoin de l'abréger pour en faciliter l'application. Ce n'est donc pas $-$ qu'on multiplie par $-$, pas même $-b$ par $-d$, mais bien $a-b$ par $c-d$, et la logique la plus exacte conduit au résultat que nous avons donné. En un mot on ne doit pas appeler le principe dont il s'agit *la Règle des signes*, mais bien *la Règle de la multiplication des polynomes*; c'est ce qui nous a déterminés à donner au théorème l'énoncé ci-dessus préférablement à l'autre.

donne pour produit la différence de leurs carrés; . . . . $(7+5)\times(7-5)=7^2-5^2$, ou $12.2=24$.

4°. Il est facile d'en conclure la forme du produit de m facteurs binomes $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ldots$; en effet, pour 2 ou 3 facteurs, on obtient le produit

$$\begin{array}{l|l} x^2+a & x+ab \\ \quad\ +b & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l|l} x^3+a & x^2+ab & x+abc \\ \quad\ +b & \quad\ +ac & \\ \quad\ +c & \quad\ +bc & \end{array}$$

Or, il suit du procédé même de la multiplication que

1° les divers termes ne peuvent éprouver de réduction entre eux; en sorte que les lettres $a\,b\,c\ldots$ n'ont ni coefficiens numériques ni exposans.

2°. Le premier terme est le produit de tous les premiers termes, et le dernier est le produit de tous les seconds termes des facteurs : entre ces extrêmes, les exposans de x vont en décroissant d'une unité de terme en terme, en sorte que le produit a, en général, la forme

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}\ldots\ldots+abcd\ldots.$$

3°. Tous les termes doivent être composés du même nombre m de facteurs, en sorte que le coefficient A de x^{m-1} ne doit pas contenir les lettres $abc\ldots$ multipliées entre elles; que celui B de x^{m-2} doit être formé de produits 2 à 2 de ces lettres, ou $ab\ ac\ bc\ldots$

4°. Si la lettre a entre d'une manière quelconque dans l'un des coefficiens $A\,B\ldots$, toutes les autres lettres $b\,c\ldots$ doivent y entrer de la même manière, puisque le produit ne doit pas changer en mettant a pour b et b pour a, etc.; donc (*Voy.* n°. 479.)

A est la somme de tous les seconds termes des binomes;
B est celle de leurs produits différens 2 à 2;
C celle de leurs produits différens 3 *à* 3, etc.



que dans les restes successifs, il est convenable d'*Ordonner* le dividende et le diviseur; c'est-à-dire, de placer, comme on le voit ici, au premier rang le terme où a porte le plus haut exposant; au second rang, le terme où a a l'exposant immédiatement moindre; et ainsi de suite

$$\begin{array}{lll} & 4a^6 - 25a^2b^4 + 20ab^5 - 4b^6 & \left\{ \begin{array}{l} 2a^3 - 5ab^2 + 2b^3 \\ \hline 2a^3 + 5ab^2 - 2b^3 \end{array} \right. \\ & -4a^6 + 10a^4b^2 - 4a^3b^3 & \\ \hline \text{1}^{\text{er}}\text{. reste.} & 10a^4b^2 - 25a^2b^4 - 4a^3b^3 + 20ab^5 - 4b^6 & \\ & -10a^4b^2 + 25a^2b^4 - 10ab^5 & \\ \hline \text{2}^{\text{e}}\text{. reste} \ldots\ldots & -4a^3b^3 + 10ab^5 - 4b^6 & \\ & +4a^3b^3 - 10ab^5 + 4b^6 & \\ \text{3}^{\text{e}}\text{. reste} \ldots\ldots & 0 & \end{array}$$

On voit qu'après avoir divisé $4a^6$ par $2a^3$, on a multiplié tout le diviseur par le quotient partiel $2a^3$, et retranché du dividende, ce qui donne un premier reste. On divise de nouveau $10a^4b^2$ par $2a^3$, on multiplie le diviseur par ce second quotient $5ab^2$, et on retranche du premier reste, ce qui donne un second reste. Enfin $\frac{-4a^3b^3}{2a^3} = -2b^3$ complète le quotient parce qu'on ne trouve plus de reste.

Lorsqu'on est conduit, comme ci-dessus, à diviser des termes, qui ont pour signes, l'un $+$, l'autre $-$, on donne au quotient le signe $-$, afin que, dans la multiplication, on reproduise le premier terme du dividende avec son signe. Si les termes à diviser eussent été négatifs l'un et l'autre, le quotient auroit eu le signe $+$. Il faut prendre ceci simplement comme un fait de calcul, sans chercher à expliquer ce que peut signifier la division de deux termes qui ne sont pas positifs ensemble; en effet, il ne s'agit ici que de trouver un système de termes, qui multiplié par le diviseur, d'après les règles connues, reproduise le dividende.

Concluons de là que, *pour diviser deux polynomes, on*

les ordonnera par rapport à une même lettre, on divisera les premiers termes entre eux, et on aura un terme du quotient; on le multipliera par le diviseur, et on retranchera du dividende : puis, on traitera le reste de la même manière. On pratiquera pour les divisions partielles la règle des signes de la multiplication. Enfin, on poussera l'opération, jusqu'à ce que la lettre suivant laquelle on a ordonné ait un exposant moindre que dans le diviseur.

Il est bien entendu qu'on pourroit ordonner par rapport à b, ou toute autre lettre commune aux deux facteurs; et même dire du plus petit exposant, tout ce que nous avons dit du plus grand.

99. Nous mettrons ici deux autres exemples de division.

$$\begin{array}{lr|l}
 & 6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4 & 2a^2+2ab-b^2 \\
 & -6a^4-6a^3b+3a^2b^2 & \overline{3a^2-ab-2b^2} \\
\text{1}^{\text{er}}\text{. reste.....} & -2a^3b-6a^2b^2-3ab^3+2b^4 & \\
 & +2a^3b+2a^2b^2-ab^3 & \\
\text{2}^{\text{e}}\text{. reste.........} & -4a^2b^2-4ab^3+2b^4 & \\
 & +4a^2b^2+4ab^3-2b^4 & \\
\text{3}^{\text{e}}\text{. reste..................} & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr|l}
 & a^5-b^5 & a-b \\
 & -a^5+a^4b & \overline{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4} \\
\text{1}^{\text{er}}\text{. reste.} & a^4b-b^5 & \\
 & -a^4b+a^3b^2 & \\
\text{2}^{\text{e}}\text{. reste.....} & a^3b^2-b^5 & \\
 & -a^3b^2+a^2b^3 & \\
\text{3}^{\text{e}}\text{. reste..........} & a^2b^3-b^5 & \\
 & -a^2b^3+ab^4 & \\
\text{4}^{\text{e}}\text{. reste..........} & ab^4-b^5 & \\
 & -ab^4+b^5 & \\
\text{5}^{\text{e}}\text{. reste...............} & 0 &
\end{array}$$

En suivant avec attention, la marche de l'exemple précédent, on voit qu'il suit du calcul même que les

exposans de a doivent décroître, et ceux de b croître, dans chaque reste et dans chaque quotient. Ainsi, $a^m - b^m$ est divisible exactement par $a - b$; on a

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + b^{m-1}$$

$$\text{si } b = 1,\ \frac{a^m - 1}{a - 1} = a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} + \ldots + 1$$

ces remarques nous seront utiles.

100. On rencontre une difficulté sur laquelle il est bon d'être prévenu; car lorsqu'il y a plusieurs termes, où la lettre suivant laquelle on a ordonné, porte le même exposant, quel est celui qui doit être écrit le premier, et que devient alors la démonstration que nous avons donnée? Avec une légère attention, on verra qu'il suffit de mettre dans les termes dont il s'agit, la lettre avec son exposant en facteur commun, et entre des parenthèses la quantité qu'elle multiplie. On doit regarder alors cet assemblage, comme ne formant qu'un seul terme. Si on a, par exemple, $4a^4b^2 - 4a^4bc + a^4c^2$, on écrira . . . . . . $a^4(4b^2 - 4bc + c^2)$.

Un exemple fera voir plus clairement la marche qu'on doit suivre.

$$\begin{array}{l|l}
(4b^2-4bc+c^2)a^4-(b^2+2bc+c^2)a^2b^2+(b+c)2ab^4-b^6 & (2b-c)a^2-(b+c)ab+b^3 \\
-(4b^2-4bc+c^2)a^4+(2b-c)(b+c)a^3b-(2b-c)a^2b^3 & \overline{(2b-c)a^2+(b+c)ab-b^3} \\
\hline
(2b-c)(b+c)a^3b-(3b^2+bc+c^2)a^2b^2+(b+c)2ab^4-b^6 & \\
-(2b-c)(b+c)a^3b+(b^2+2bc+c^2)a^2b^2-(b+c)ab^4 & \\
\hline
-(2b-c)a^2b^3+(b+c)ab^4-b^6 & \\
+(2b-c)a^2b^3-(b+c)ab^4+b^6 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

on regarde $(4b^2 - 4be + c^2)a^4$ comme ne formant qu'un seul terme, ainsi que $(2b - c)a^2$; le quotient de ces quantités est $(2b - c)a^2$. Le calcul s'achève à l'ordinaire.

On verra de même que le quotient de

$$x^m + p\,x^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + tx + u,$$

divisé par $x - a$, est

$$x^{m-1} + (a+p)\,x^{m-2} + (a^2 + ap + q)\,x^{m-3}$$
$$+ (a^3 + a^2p + aq + r)\,x^{m-4} + \ldots$$

La loi est facile à saisir ; le reste est

$$a^m + pa^{m-1} + qa^{m-2} + \ldots + ta + u.$$

5. *Des Fractions.*

101. Tout ce qui a été dit des fractions numériques, doit se dire aussi des algébriques. Ainsi

1°. Pour désigner que l'unité est divisée en b parties égales dont on prend a parties, on écrira $\frac{a}{b}$, comme si on avoit a à diviser par b, parce que le produit de $\frac{a}{b} \times b$, est égal au numérateur a (29 et 30) ;

2°. $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$ quel que soit m (31) ; réciproquement si $\frac{c}{d}$ est irréductible, et si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a est multiple de c, b l'est de d, et on a $a = mc$, $b = md$; (33)

3°. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$; $\frac{a}{m} \pm 1 = \frac{a \pm m}{m}$; (32).

Le signe $\pm$ s'énonce *plus ou moins*.

4°. $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$; $\frac{a}{mb} \times b = \frac{a}{m}$; (38)

5°. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$; $\frac{am}{b} : m = \frac{a}{b}$; (39)

6°. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\left(a + \frac{b}{c}\right)\left(m + \frac{p}{q}\right)$ donne pour produit $\frac{(ac+b)\ (mq+p)}{qc}$; (40, 41)

7°. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; $\left(a+\frac{b}{c}\right) : \left(m+\frac{p}{q}\right) = \frac{q(ac+b)}{c(mq+p)}$; (42).

8°. Soit p la période d'une fraction décimale composée de n chiffres, et que nous écrirons ainsi $x = o, ppp......$ multipliant par 10^n, il viendra $10^n x = p,ppp....$ soustrayant, on trouve $x = \frac{p}{10 - 1} = \frac{p}{999\cdots}$, comme n°. 52.

102. Les propriétés des nombres se démontrent avec bien plus de facilité par l'algèbre.

1°. Divisons deux facteurs F et F' par un nombre quelconque n, et désignons par q et q' les quotiens, et par r et r' les restes : on aura (98), $F = qn + r$, ... $F' = q'n + r'$; d'où $FF' = qq'n^2 + q'nr + qnr' + rr'$; divisant cette équation par n, on voit que rr' doit donner le même reste que le produit FF', ce qui prouve le théorème de la note (23).

2°. Soient..... $d\,c\,b\,a$ les chiffres successifs qui représentent un nombre A dans le système de numération qui a n caractères. Comme un chiffre vaut n fois plus que s'il occupoit la place qui est à sa droite, on a .... $A = a + bn + cn^2 + dn^3 + ...$ on trouvera donc aisément la valeur de A, lorsque $a, b, c......$ et n seront connus.

Réciproquement, pour trouver les chiffres .....$c\,b\,a$ qui expriment un nombre donné A, on divisera A par l'échelle n du système de numération ; le reste a sera le chiffre à droite. En divisant de même par n le quotient....... $b + cn + dn^2 + ...$ le reste b sera le second chiffre, etc... tout ceci est d'accord avec ce qu'on connoît (note n.° 7.)

3°. Supposons que P étant un nombre premier, $\frac{AB}{P}$ soit entier, et que A ne soit pas divisible par P. Le

commun diviseur de B et P est 1, de sorte qu'en désignant par $Q\ Q'\ Q''$.... les quotiens, et $R\ R'\ R''$.... 1 les restes successifs, on a

$$B=PQ+R,\quad P=RQ'+R',\quad R=R'Q''+R'',\ldots\ .$$

Multiplions ces équations par $\frac{A}{P}$, nous aurons

$$\frac{AB}{P}=AQ\quad+\frac{AR}{P},$$
$$A=\frac{ARQ'}{P}+\frac{AR'}{P},$$
$$\frac{AR}{P}=\frac{AR'Q''}{P}+\frac{AR''}{P},\ldots.$$

Comme on suppose AB divisible par P, la première prouve que AR l'est aussi ; dans la seconde $\frac{ARQ'}{P}$ étant entier, $\frac{AR'}{P}$ l'est pareillement : il en est de même de $\frac{AR''}{P}$ dans la troisième,.... et enfin de $\frac{A\times 1}{P}$ ou $\frac{A}{P}$ dans la dernière. Ainsi *lorsqu'un produit* AB *est divisible par un nombre premier* P, *l'un des facteurs au moins l'est lui-même* (33, 1°.).

On peut fonder sur cela la théorie des irrationnelles; si $\sqrt{N}$ n'est pas un nombre entier, N étant entier, on ne peut trouver exactement $\sqrt{N}$ en nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$. Car alors on auroit $\frac{a^2}{b^2}=N$, ce qui est absurde puisque $\frac{a^2}{b^2}$ est irréductible quand $\frac{a}{b}$ l'est (*Voy.* n°. 63). On en dira autant de $\sqrt[3]{N}$,....

On dit qu'une fraction $\frac{x}{q}$ est approchée de $\sqrt{N}$ à moins de $\frac{1}{q}$, quand N est compris entre son carré et

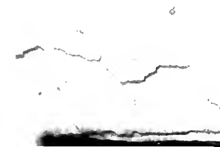


celui de $\frac{x+1}{q}$, ou quand $\frac{x^2}{q^2} < N < \frac{(x+1)^2}{q^2}$. Or $\sqrt{N} = \frac{q\sqrt{N}}{q} = \frac{\sqrt{(Nq^2)}}{q}$; comparant à $\frac{x}{q}$, on voit que x est la racine de Nq^2 en nombre entier (63).

103. Lorsqu'on a deux polynomes A et B, on peut se proposer de trouver le produit de tous leurs facteurs communs, c'est ce qu'on nomme en algèbre leur *plus grand diviseur commun.* On pratiquera ici la même règle qu'en arithmétique (35) ; car si A est divisible par B, en désignant le quotient par Q, on aura $A = BQ$, et il est visible que B est le plus grand commun diviseur cherché. Mais s'il y a un reste R, alors $A = BQ + R$; en divisant par un nombre quelconque D qui soit diviseur des deux polynomes A, B ou B et R, on a $\frac{A}{D} = \frac{B}{D} \times Q + \frac{R}{D}$; ce qui prouve que D divise aussi le troisième R ou A ; de sorte que tout diviseur de A et B l'étant aussi de B et R, et réciproquement, la question est réduite à chercher le plus grand commun diviseur entre B et R. Le raisonnement s'achève de même.

Lorsqu'on veut appliquer ce calcul, on reconnoît bientôt qu'en algèbre il doit éprouver des modifications : car soient Ka^m et ka^n, le premier terme de A et celui de B ; m n'étant pas $< n$, celui du quotient Q sera $\frac{K}{k} a^{m-n}$, et il faudra que K soit multiple de k, puisque la force de notre raisonnement repose principalement sur ce que le quotient Q doit être entier. Mais on remarquera que

1°. *Lorsqu'on multiplie ou divise l'une des deux quantités* A *et* B *par un nombre, qui n'est pas facteur de l'autre, on n'altère pas leur plus grand commun diviseur* D. Car



si A et B sont de la forme aD et bD, a et b n'ayant pas de commun diviseur, il est visible qu'on peut supprimer a, ou b, ou quelques-uns de leurs facteurs sans que D cesse d'être le plus grand commun diviseur de ces quantités. On peut aussi multiplier la première par un nombre quelconque p premier avec b, etc....

2°. Soit un polynome $Ka^m + La^{m-1} + \dots$; si on le multiplie par b, on a $bKa^m + bLa^{m-1} + \dots$ or, il ne pourra y avoir aucune réduction, tant que b sera indépendant de a; donc *pour qu'un polynome soit divisible par* b, *il faut que chaque terme le soit en particulier.*

D'après cela, on cherchera tous les *facteurs simples* de K et k; puis prenant l'un d'eux, il se présentera trois cas. 1°. S'il divise tous les termes des deux polynomes, il sera l'un des facteurs communs indépendans de x. On sera même certain de les obtenir tous par cette voie, puisqu'ils sont nécessairement compris parmi les diviseurs de K et k. On supprimera ces facteurs à mesure qu'on les rencontrera, en se réservant de les introduire ensuite comme multiplicateur du plus grand commun diviseur des deux quotiens, sur lesquels il ne s'agira plus que d'opérer.

2°. Si ce facteur divise seulement les termes de l'un des polynomes, on pourra exécuter encore cette division, le commun diviseur n'en sera pas altéré, et le calcul subséquent en sera plus simple.

3°. Enfin, si ce facteur ne divise ni l'un ni l'autre des polynomes, et qu'il appartienne à k, on multipliera tout le dividende $Ka^m + \dots$ par ce facteur.

On remplacera ainsi les deux premiers termes Ka^m, Ka^n, par d'autres sur lesquels la division pourra être faite exactement, puisqu'on aura supprimé les facteurs de k qui s'y opposent, ou qu'on les aura introduits dans K.



On devra en faire autant pour chacune des divisions partielles qu'exige l'application de notre règle.

Soit proposé, par exemple, de réduire la fraction $\frac{6a^3 - 6a^2y + 2ay^2 - 2y^3}{12a^2 - 15ay + 3y^2}$ à la plus simple expression.

Les facteurs simples des coefficiens 6 et 12 des premiers termes sont $6 = 2 \times 3$, $12 = 3 \times 2 \times 2$. On voit d'abord que 2 divise le numérateur seulement, 3 le dénominateur. Après avoir effectué cette double division sur les premiers termes, ils seront $3a^3$ et $4a^2$: il faudra donc multiplier celui-là par 4, ou plutôt le numérateur par 2, pour rendre la division exacte, puis diviser le dénominateur par 3 et chercher le plus grand commun diviseur de $12a^3 - 12a^2y + 4ay^2 - 4y^3$ et $4a^2 - 5ay + y^2$. Une première division donne le quotient $3a$ et le reste. . . $3a^2y + ay^2 - 4y^3$. Pour rendre de nouveau la division possible, on multipliera ce reste par 4 ; on pourra aussi supprimer le facteur y et le dividende deviendra . . . . $12a^2 + 4ay - 16y^2$.

Une seconde division conduit au reste $19ay - 19y^2$, qui doit être pris pour diviseur de $4a^2 - 5ay + y^2$. On supprimera les facteurs 19 et y dans ce diviseur, qui devient $a - y$, et qui divise exactement ; $a - y$ est donc le plus grand commun diviseur cherché. La fraction proposée se réduit à $\frac{6a^2 + 2y^2}{12a - 3y}$. Voici le calcul.

$$\begin{array}{r|l|l}
12a^3 - 12a^2y + 4ay^2 - 4y^3 & 4a^2 - 5ay + y^2 & 19ay - 19y^2 \\
3a^2y + ay^2 - 4y^3 & \overline{3a + 3} & \quad a - y \text{ com. div.} \\
12a^2 + 4ay - 16y^2 & \quad - ay + y^2 & \overline{4a - y} \\
19ay - 19y^2 & \overline{\quad\quad 0} &
\end{array}$$

On verra de même que la fraction . . . . . .

$\frac{4a^4 - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4}{6a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4}$ a pour plus grand commun diviseur de ses deux termes $2a^2 + 2ab - b^2$, et se réduit à $\frac{2a^2 - 2ab + b^2}{3a^2 - ab - 2b^2}$.

De même pour la fraction $\frac{54a^2b - 24b^3}{45a^3b + 3a^2b^2 - 9ab^3 + 6b^4}$ on verra que $3b$ est le facteur commun indépendant de a; supprimant ce facteur dans les deux termes, ainsi que 2 au numérateur, on est conduit à chercher le plus grand commun diviseur entre $9a^2 - 4b^2$ et . . . . $15a^3 + a^2b - 3ab^2 + 2b^3$. On trouvera qu'il est $3a + 2b$; ainsi $3b(3a + 2b)$ est celui qu'on cherche, et la fraction se réduit à $\frac{6a - 4b}{5a^2 - 3ab + b^2}$.

On ne doit pas oublier qu'ici, comme au n° 100, faut regarder les termes qui contiennent une même puissance de la lettre par rapport à laquelle on ordonne, comme ne faisant qu'un seul terme. C'est ce qui a lieu pour la fraction

$$\frac{a^2(b^2 - c^2) - ab(2b^2 + bc - c^2) + b^3(b + c)}{a^3(b^2 + 2bc + c^2) - a^2b(2b^2 + 3bc + c^2) + ab^3(b + c)}.$$

La considération des facteurs de $b^2 - c^2$ et $b^2 + 2bc + c^2$, qui sont les coefficiens des premiers termes, fait bientôt reconnoître que $(b + c)$ est un facteur commun indépendant de a. En le supprimant, on cherche le plus grand diviseur entre $a^2(b - c) - ab(2b - c) + b^3$ et $a^3(b + c) - a^2b(2b + c) + ab^3$, qu'on trouve par le calcul être $a - b$; ainsi celui des deux termes de la fraction proposée est $a(b + c) - b(b + c)$; elle se réduit à $\frac{a(b - c) - b^2}{a^2(b + c) - ab^2}$.

CHAPITRE II.

DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

1. *Premier degré à une seule inconnue.*

104. Le degré d'une équation est marqué par la plus haute puissance de l'inconnue qu'elle renferme : x, y, z... désigneront les inconnues, a, b, c..... les données. Ainsi $ax+b=cx$ est du premier degré ; $ax^2+bx=c$ est du second ; $x^3+px^2+qx=r$ est du troisième, etc.

Pour résoudre un problème proposé, il faut d'abord exprimer par une équation la liaison qui existe entre les données et les inconnues : cette traduction du problème en langage algébrique une fois faite, il faut *Résoudre* l'équation, c'est-à-dire, dégager l'inconnue de tout ce qui l'affecte, et l'amener à la forme $x=A$; A est la valeur cherchée.

I. Par exemple, un père a 4 fois l'âge de son fils, la somme des deux âges est 45 ans ; quel est l'âge de chacun ? Soit x l'âge du fils, $4x$ sera celui du père ; ainsi $x+4x$ doit faire 45 ans, d'où $5x=45$. Telle est l'équation qui dans notre problème exprime la liaison de l'inconnue aux quantités données 5 et 45. Il faut maintenant la résoudre, ce qui se fait en divisant le produit 45 par 5 ; le quotient 9 est l'autre facteur (5) ; $x=9$ donne 9 ans pour l'âge du fils et 36 ans pour celui du père.

On voit ici bien distinctement les deux difficultés qu'offre

tout problème ; *poser l'équation* et *la résoudre*. Nous allons nous occuper de ces deux objets, en commençant par le second.

105. L'inconnue ne peut être engagée dans une équation du premier degré, que par addition, soustraction, multiplication et division : voici les règles qu'il faut pratiquer pour la dégager.

1°. *Si les coefficiens des termes inconnus sont fractionnaires, multipliez toute l'équation par le nombre qui servit dénominateur commun* (32) *:* cette opération, sans altérer l'équation, fera disparoître les diviseurs. Cela revient à réduire tout au même dénominateur, puis le supprimer. Soit par exemple $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x - 20 - \frac{1}{6}x = \frac{3}{4}x - \frac{1}{12}x - 8$. En multipliant tout par 12, cette équation devient. . . $8x + 6x - 240 - 2x = 9x - x - 96$, qui se réduit à $12x - 240 = 8x - 96$.

2°. *On réunira tous les termes inconnus dans l'un des membres, et les quantités connues dans l'autre, en changeant le signe des termes qui changent de membre :* c'est ce qu'on appelle *Transposer* (4). Ainsi notre exemple deviendra $12x - 8x = 240 - 96$, ou $4x = 144$. On voit en effet qu'en effaçant 240 du premier membre, ce qui le réduit à $12x$, au lieu de $12x - 240$, on l'augmente de 240; pour ne point troubler l'égalité, il faut donc ajouter 240 au second membre. Pareillement, en supprimant $8x$, on diminue de $8x$ le second membre, il faut donc aussi retrancher $8x$ du second.

3°. L'équation, d'après ces préceptes, sera amenée à la forme $ax = b$; b est le produit de a multiplié par x ; en divisant b par a, le quotient donnera donc x, (5) : ainsi $x = \frac{b}{a}$. De même $4x = 144$, donne $x = \frac{144}{4} = 36$; ce nombre résout l'équation que nous nous etions proposée.

ci-dessus, c.-à-d., que les deux membres seront égaux, si on met partout 36 pour x.

Concluons de là que *pour dégager l'inconnue de son coefficient, il faut diviser toute l'équation par ce coefficient.*

4°. *Une équation du 1er. degré n'admet qu'une solution;* car on peut toujours la mettre sous la forme (note p. 128) $ax + b = cx + d$; or si α et β sont deux valeurs de l'inconnue, on aura $a\alpha + b = c\alpha + d$, $a\beta + b = c\beta + d$, et retranchant, on trouve $a(\alpha - \beta) = c(\alpha - \beta)$, équation qui revient à $(a - c)(\alpha - \beta) = 0$ et ne peut être satisfaite à moins qu'on n'ait $\alpha = \beta$ puisque a et c sont donnés et inégaux.

Voici plusieurs autres exemples.

1°. $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{f} + m = px + \frac{cx}{f} + n$; on supprimera le terme $\frac{cx}{f}$, commun aux deux membres, et on aura . . $\frac{ax}{b} + m = px + n$; multipliant tout par b, il vient . . . . . $ax + bm = bpx + bn$; transposant bm et bpx, on a $ax - bpx = bn - bm$, ou $x(a - bp) = b(n - m)$; en divisant par $a - bp$, il vient enfin

$$x = \frac{b\ (n - m)}{a - bp}.$$

2°. $\frac{6}{5}x - 90 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - 82$; transposant, on trouve $\frac{6}{5}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x = 90 - 82$, qui se réduit à $\frac{6}{5}x - \frac{2}{3}x = 8$; multipliant par 15, on obtient. . . . $18x - 10x = 8.15$, ou $8x = 8.15$, et enfin $x = 15$.

3°. De même $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{3}x - 10$ donne. . . . . . $9 + 10 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x$ et multipliant par 21, il vient . . $19.21 = 7x - 6x$, d'où $x = 19.21 = 399$.

4°. $\frac{2}{9}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{7}{5}x$, donne. . . . . $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$; on multiplie par 9.4.5 ou 180,

et on obtient $40x - 45x + 252x = 180.100$, ou . . . $247x = 18000$: donc $x = \frac{18000}{247}$.

106. Venons-en maintenant à la principale difficulté qui consiste à poser le problème en équation. Pour cela, on examinera attentivement l'état de la question pour en bien comprendre le sens, et donnant au hasard une valeur à l'inconnue, on la soumettra à tous les calculs nécessaires pour s'assurer si elle y répond ou non. On connoîtra ainsi la suite des opérations qu'il faut faire subir au nombre cherché, lorsqu'il est trouvé, pour vérifier s'il convient en effet au problème. Enfin, on fera, à l'aide des signes algébriques, sur x représentant l'inconnue, toutes ces opérations et l'équation sera posée.

II. Soit par exemple demandé quelle étoit la dette d'un homme qui après en avoir acquitté la moitié une première fois, le tiers une seconde, le 12ᵉ. une autre fois, se trouve ne plus devoir que 630 fr.

Supposons que cet homme devoit 1200 fr.; la moitié est 600, le tiers 400, le 12ᵉ. 100; il a donc payé 1100; mais il redoit encore 630 fr.; donc il devoit en tout 1100 + 630 ou 1730 fr., et non pas 1200 comme on l'a supposé. Ainsi, cette hypothèse étoit fausse; mais il en résulte une suite de calculs qu'on pratiquera aisément sur x, et qui donnera

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{12} + 630.$$

Le reste n'a plus de difficulté; en multipliant par 12, on a $12x = 6x + 4x + x + 7560 = 11x + 7560$; d'où $x = 7560$ fr., c'est le nombre cherché, ainsi qu'on peut s'en assurer.

Notre règle, pour poser un problème en équation, consiste donc à *faire subir à* x *toutes les opérations qu'on*

sera sur le nombre cherché, lorsqu'après l'avoir trouvé, on voudra vérifier, s'il répond en effet à la question.

La valeur arbitraire attribuée à l'inconnue ne sert qu'à mettre ces calculs en évidence, et l'usage apprend bientôt à s'en passer. Voici divers autres problèmes.

III. Quel est le nombre dont le tiers et le quart ajoutés ensemble font 63. Soit x ce nombre, $\frac{x}{3}$ en sera le tiers, $\frac{x}{4}$ le quart; donc $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=63$; cette équation se réduit à $7x=12.63$, d'où $x=\frac{12.63}{7}=12.9=108.$

Remarquons que pour obtenir le nombre dont le 5e. et le 6e. ajoutés forment 22, il faut recommencer de nouveau à poser l'équation, puis la résoudre; on a ainsi $\frac{x}{5}+\frac{x}{6}=22$, d'où $11x=30.22$ et $x=30.2=60.$

Si donc on veut résoudre à la fois ces deux problèmes, et tous ceux qui n'en diffèrent que par les valeurs numériques, il faut remplacer ces nombres par des signes abc.... propres à représenter toute valeur. Il faudra donc résoudre cette question : quel est le nombre qui, divisé par a et b, donne s pour somme des quotiens. On trouve

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=s, \text{ d'où } x=\frac{abs}{a+b}.$$

Cette expression n'est pas à proprement parler la valeur de l'inconnue dans nos problèmes, mais elle offre le tableau des calculs qui les résolvent. Cette *Formule* montre qu'on a l'inconnue en multipliant les trois nombres que renferme la question, et divisant ce produit abs par la somme $a+b$ des deux diviseurs, ou plutôt notre formule n'est qu'une manière abrégée d'écrire cet énoncé.

L'algèbre n'est donc qu'une langue destinée à exprimer les raisonnemens, et qu'il faut savoir lire et écrire.

Tel est l'avantage qu'offre cette formule, que l'algébriste le plus expert et l'arithméticien le moins intelligent peuvent maintenant résoudre l'un et l'autre le problême. Mais ce dernier n'y parviendra qu'en s'abandonnant à une routine aveugle ; d'ailleurs, les questions peuvent exiger des formules différentes, et l'algébriste a seul le secret de les obtenir. On voit par là pourquoi quelques personnes calculent souvent avec une facilité surprenante sans comprendre ce qu'elles font, quoiqu'elles sachent trouver exactement les résultats.

107. Les formules présentent encore un autre avantage ; c'est de permettre de changer d'inconnue ; de sorte, qu'on peut résoudre tous les problêmes qui tendroient à trouver l'une des quantités a, b, s et x, connoissant les trois autres.

Veut-on, par exemple, trouver quel est le diviseur de 60, qui donne un quotient qui, ajouté au 6e. de 60, (ou 10) donne 22, on aura a pour inconnue dans $(a+b)\,x = abs$ et x est donné $= 60$. On trouvera $ax + bx = abs$, d'où $bx = abs - ax = a\,(bs - x)$, et $a = \frac{bx}{bs - x}$. Dans notre exemple, le diviseur a est donc

$$a = \frac{6.60}{6.22 - 60} = \frac{60}{22 - 10} = 5.$$

Cette remarque peut servir à faciliter la résolution des problêmes lorsque l'inconnue est engagée d'une manière embarrassante.

IV. La somme des âges de deux frères est 57 ans, l'aîné a 7 ans de plus que l'autre ; on demande l'âge de chacun. Soit x l'âge du plus jeune, $x + 7$ est

celui de l'aîné ; il faut donc que x ajouté à $x + 7$ donne 57 ; d'où $2x + 7 = 57$ et $x = 25$, le plus jeune a 25 ans, l'aîné 32 ans.

En examinant cette question, il sera facile de reconnoître qu'elle renferme des élémens inutiles : elle se réduit visiblement à la recherche des deux nombres dont la somme est 57 et la différence 7. En général, il convient de dépouiller les questions de tout appareil étranger, qui ne peut qu'obscurcir les idées et faire perdre la liaison des quantités. C'est un tact particulier qu'il faut acquérir : ni maîtres, ni livres ne peuvent donner la sagacité nécessaire pour démêler dans un problème le principal de l'accessoire. L'usage donne une grande facilité, c'est pour cela que nous donnons ici diverses questions. Pour généraliser le problème précédent, cherchons *les deux nombres qui ont* s *pour somme et* d *pour différence.* Soit x le plus petit ; $x + d$ est le plus grand, donc $x + x + d = s$, d'où

$$2x = s - d, \text{ et } x = \tfrac{1}{2}(s - d).$$

C'est le plus petit des nombres cherchés ; le plus grand est $x + d$, ou $\frac{1}{2}(s - d) + d = \frac{1}{2}(s + d)$. Donc

$$x = \tfrac{1}{2}(s - d), \quad x + d = \tfrac{1}{2}(s + d)$$

sont les nombres qui répondent à la question : *on prendra la moitié de la somme et la moitié de la différence données ; on aura le plus grand, en ajoutant ces deux moitiés ; et le plus petit en les retranchant.*

Une maison composée de deux étages a 15 mètres de haut ; le premier est plus élevé que le second de 1 mètre ; on demande la hauteur de chaque étage. $7\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ sont les moitiés des nombres donnés : ainsi $7\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ou 8 mètres est la hauteur du premier ; $7\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ ou 7 mètres est celle du second.

V. Partager un nombre a en deux parties qui soient entre elles comme m est à n? x étant l'une des parties, l'autre est $\frac{nx}{m}$: donc $x+\frac{nx}{m}=a$; d'où $x=\frac{ma}{m+n}$.

Pour partager a en trois parties qui soient entre elles $:: m : n : p$, x étant l'une, $\frac{nx}{m}$ et $\frac{px}{m}$ seront les deux autres : donc $x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a$, d'où $x=\frac{ma}{m+n+p}$; (*V.* 79).

VI. Un père a 40 ans, son fils en a 12; on demande dans quel tems le père aura le triple de l'âge du fils. Dans x années, le père aura $40+x$ ans, et le fils $12+x$; or $40+x$ doit être le triple de $12+x$; ainsi

$$40+x=36+3x,\quad \text{d'où } x=2.$$

VII. Plusieurs associés, que je nommerai A, B, C..... font un bénéfice; et conformément à leurs conventions, A prend sur la masse commune 10 napoléons, et le 6e. du reste : B prend à son tour 20 napoléons, et le 6e. du reste : C en prend 30, et le 6e. du reste.... ainsi de suite jusqu'au dernier qui prend ce qui se trouve. Le partage fait, chacun a autant que les autres; on demande la masse, le nombre des associés et la part de chacun.

On seroit porté à croire qu'il faut introduire ici trois inconnues : mais un peu d'attention fait reconnoître que si la masse x étoit trouvée, en effectuant le partage, on auroit bientôt les autres inconnues du problème.

Puisque A prend 10 napoléons, il reste $x-10$, dont le 6e. est $\frac{x-10}{6}$; sa part est donc $10+\frac{x-10}{6}$ ou... $\frac{x+50}{6}$.



B prend 20; le reste est $x - \frac{x+50}{6} - 20 = \frac{5x-170}{6}$ dont le 6e. est $\frac{5x-170}{36}$; la part de *B* est donc. . . . . $20 + \frac{5x-170}{36}$ ou $\frac{5x+550}{36}$. Puisque ces deux parts doivent être égales, on a $\frac{x+50}{6} = \frac{5x+550}{36}$, ou... $6x + 300 = 5x + 550$; d'où $x = 250$. La masse étant formée de 250 napoléons, la part de chacun est $\frac{x+50}{6}$ ou 50; divisant 250 par 50, on trouve 5 pour le nombre des associés.

VIII. Avec un nombre a de cartes, on forme b tas, composés chacun de c points : la première des cartes de chaque tas est comptée pour 11 points, si elle est un as, 10 si elle est une figure ou un dix. . . . ., etc. Les autres cartes du même tas ne valent qu'un point. Ces tas formés, on vous remet d cartes qui restent, et on demande la somme x des points des seules premières cartes.

Le nombre des points de chaque tas, multiplié par celui des tas, ou bc, est le nombre total des points : si de ce nombre on retranche les cartes qui ne comptent que pour un point, le reste sera $= x$. Or le nombre de ces cartes est $a - d -$ le nombre des cartes qui comptent pour plus d'un point, ou b. Ainsi $x = bc - (a - d - b)$ ou $x = b(c+1) + d - a$.

Si on a 32 cartes, qu'on fasse trois tas de 12 points, on aura $x = d + 7$.

IX. *A* et *B* se sont mis au jeu chacun avec une somme égale : la perte de *A* est 12 fr.; celle de *B*, 57 fr.; par là *B* n'a plus que le quart de ce qui reste à *A*. Combien chacun avoit-il avant le jeu? Réponse 72 fr.

X. Quel est le nombre qui, divisé par a et b, donne deux quotiens qui ont d pour différence. On trouve $x = \frac{abd}{b-a}$.

XI. Trouver un nombre dont le produit de ses m parties égales, soit le même que celui des $m+1$ parties égales du même nombre (le produit des 3 tiers, égal, par exemple, à celui des 4 quarts). On a. . . . . . .
$x = \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}$.

XII. Un chasseur promet à un autre de lui donner b fr., toutes les fois qu'il manquera une pièce de gibier, pourvu que celui-ci donne c fr. chaque fois qu'il l'atteindra. Après n coups de fusil, ou les deux chasseurs ne se doivent rien, ou le premier doit d au second, ou le contraire a lieu : on demande une formule propre à ces trois cas, et qui fasse connoître le nombre x de coups manqués.

On trouve $x = \frac{cn \pm d}{b+c}$; d est nul dans le 1er. cas; on prend le signe supérieur dans le second, et l'inférieur dans le troisième.

XIII. Une fontaine emplit un réservoir en un nombre d'heures désigné par h; une autre peut le remplir en h' heures; on demande combien elles mettroient de tems en coulant ensemble? Réponse $x = \frac{hh'}{h+h'}$.

2. *Remarques sur les équations du premier degré.*

108. Les formules algébriques ne peuvent offrir d'idée nette à l'esprit qu'autant qu'elles représentent une suite de calculs numériques dont l'exécution est possible. Ainsi la quantité isolée $b-a$, ne peut signifier qu'une chose absurde lorsque a est $> b$. Il convient donc de reprendre

les calculs précédens, parce qu'ils offrent quelquefois cette difficulté.

Toute équation du premier degré peut être ramenée à (*)

$$ax + b = cx + d \ldots \quad (1).$$

tous les signes étant positifs : retranchons $cx + b$ de part et d'autre, il viendra $ax - cx = d - b$, d'où

$$x = \frac{d - b}{a - c} \ldots \quad (2).$$

Cela posé, il se présente trois cas : 1°. ou $d > b$ et $a > c$; 2°. ou l'une de ces conditions a seule lieu ; 3°. enfin $b > d$ et $c > a$. Dans le premier cas la valeur (2) résout le problème ; dans les deux derniers on ne sait plus quel sens on doit attacher à la valeur de x, et c'est ce qu'il faut examiner.

Dans le second cas, l'une des soustractions $d - b$, $a - c$ est impossible : soit par exemple, $b > d$ et $a > c$; il est clair que la proposée (1) est absurde, puisque les deux termes ax et b du premier membre sont respectivement plus grands que ceux cx et d du second. Ainsi, lorsque cette difficulté se présentera, on sera assuré que le problême est absurde, parce que l'équation n'en est que la traduction fidèle en langage algébrique.

Le troisième cas a lieu lorsque $b > d$ et $c > a$; alors on a deux soustractions impossibles : mais nous avons ôté $cx + b$ des deux membres de l'équation (1), afin de la résoudre ; or cela est manifestement impossible, puisque

(*) On changera les termes négatifs de membre, ce qui sera toujours possible, puisque rien n'empêche d'ajouter aux deux membres une même quantité. On ne pourroit pas la soustraire dans tous les cas, puisqu'il faudroit que les deux membres fussent plus grands que cette quantité.

chacun est $< cx + b$. Ce calcul étant vicieux, nous ôterons $ax + d$ de part et d'autre, et il viendra . . . . . . $b - d = cx - ax$, d'où

$$x = \frac{b - d}{c - a} \quad \ldots \quad (3).$$

Cette valeur comparée à (2) n'en diffère que parce que les signes sont changés haut et bas ; elle ne présente plus d'obscurité. On voit donc que lorsque ce cas se rencontrera, il annoncera qu'au lieu de passer tous les termes inconnus dans le premier membre, il auroit fallu les mettre dans le second : et il ne sera pas nécessaire, pour rectifier cette erreur, de recommencer les calculs ; il suffira de changer les signes haut et bas.

Un des principaux avantages que présente l'algèbre, est de donner des formules propres à tous les cas d'une même question, quels que soient les nombres qu'elle renferme. Or, nous remplirons ici ce but en convenant de *pratiquer sur les quantités négatives isolées, les mêmes calculs, que si elles étoient accompagnées d'autres grandeurs.* Par exemple, si on avoit $m + d - b$ et $b > d$, on écriroit $m - (b - d)$; nous mettrons aussi $-(b - d)$, pour $d - b$ lorsque b sera $> d$. La valeur de x, dans le second cas, devient $x = -\dfrac{b - d}{a - c}$, et nous dirons que *toute solution négative dénote une absurdité.*

Pareillement, pour diviser $-a^4 + 3a^2b^2 +$, etc., par $-a^2 + b^2 +$ etc., on divisera d'abord $-a^4$ par $-a^2$, et on sait (98) que le quotient a^2 a le signe $+$. Nous en dirons autant de ces quantités $-a^4$, $-a^2$ isolées ; de sorte que dans le 3e. cas, la valeur de x aura la forme . . . . $\dfrac{-(b-d)}{-(c-a)}$, qui se réduit à $\dfrac{b-d}{c-a}$, comme elle doit être.

109. Cette convention qui n'entraîne aucun inconvénient réunit donc tous les cas dans la formule (2); mais on ne doit pas oublier que les quantités négatives isolées $-k$, $\frac{-m}{-n}$, ne sont que des êtres de convention, des *Symboles*, qui n'ont aucune existence par eux-mêmes; et qu'on ne les emploie comme s'ils en avoient une, que parce qu'on est assuré de remplir un but important, sans qu'il en puisse résulter d'inconvénient. Concluons de là que :

1°. *On a le droit de changer tous les signes d'une équation, et de la multiplier par une quantité négative.* En effet, si on est dans le premier cas, l'équation deviendra, il est vrai, absurde d'exacte qu'elle étoit; mais la division des quantités négatives rétablira les choses dans leur état primitif. Dans le second cas, l'absurdité du problème sera encore manifestée par une valeur négative; et enfin, s'il s'agit du troisième, le changement de signes rectifiera le vice de calcul;

2°. Lorsque l'équation sera absurde, on pourra encore tirer parti de la solution négative; car mettant $-x$ pour x, l'équation proposée devient $-ax + b = -cx + d$, d'où $x = \frac{b-d}{a-c}$, valeur égale à la précédente (2), mais positive. Si donc on modifie la question de manière que cette équation lui convienne, ce second problême, qui aura avec le premier une ressemblance marquée, ne sera pas absurde, et au signe près, il aura même solution.

Présentons, par exemple, le problême VI comme il suit : un père a 40 ans, son fils en a 12, *dans combien d'années* l'âge du fils sera-t-il le quart de celui du père? On a $40 + x = 4\ (12 + x)$ d'où $x = -\frac{8}{3}$:

ainsi ce problème est absurde. Mais si on met $-x$ pour x, l'équation devient $40-x=4\,(12-x)$, et les conditions qui y correspondent changent le problème en celui-ci : un père a 40 ans, son fils en a 12, *combien d'années se sont écoulées* depuis l'époque où l'âge du fils étoit le quart de celui du père. On a $x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

Quel est le nombre x, qui divisé par a, donne s pour somme du diviseur a, du quotient et du dividende x? On a $\frac{x}{a}+a+x=s$, d'où $x=\frac{a(s-a)}{a+1}$. Or si $a>s$, x est négatif et la question est absurde ; ce qui est d'ailleurs visible d'avance : ainsi $a=11$, $s=5$ donnent $x=-5\frac{1}{2}$. Mettant $-x$ pour x, on trouve . . . . . $11-\frac{x}{11}-x=5$; de sorte que $5\frac{1}{2}$ est le nombre qui joint au quotient de $5\frac{1}{2}$ divisé par 11, et retranché de 11 donne 5 pour reste.

Quel est le nombre dont le tiers et le cinquième ajoutés, diminués de 7, donnent ce même nombre pour différence ? On a $\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x-7=x$; d'où $x=-15$. La question est absurde ; mais remplaçant x par $-x$, on verra que 15 est le nombre dont le tiers et le cinquième ajoutés à 7, forment 15.

110. L'équation (2) présente encore deux singularités. Si $a=c$, on a $x=\frac{d-b}{0}$; mais la proposée devient alors $ax+b=ax+d$, ou $b=d$: ainsi tant que b est different de d le problème est absurde, et n'est plus de nature à être modifié comme ci-dessus. En faisant croître n, la fraction $\frac{m}{n}$ augmente ; pour $n=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, les résultats sont 2, 100, 1000 fois plus grands. La limite est l'*infini* qui répond à $n=0$; on voit donc que *le*

problème est absurde quand la solution est infinie ; ce qu'on désigne par le signe $x = \infty$.

Mais si $a = c$ et $b = d$, alors $x = \frac{0}{0}$; et la proposée devient $ax + b = ax + b$: les deux membres sont égaux quel que soit x, qui est absolument arbitraire. Ainsi *le problème est indéterminé, ou reçoit une infinité de solutions, lorsqu'on trouve* $x = \frac{0}{0}$.

3. *Equations du premier degré à plusieurs inconnues.*

111. Il faut toujours autant d'équations que d'inconnues ; car si on n'a qu'une équation entre deux inconnues x, y, on ne peut en déduire la valeur de x qu'autant que y est donné ; et comme rien ne détermine y, cette quantité peut prendre toutes les valeurs possibles. On a donc un nombre infini de solutions, et *le problème est indéterminé.*

Cherchons deux nombres x et y dont la somme soit 12 ; il faudra résoudre $x + y = 12$, d'où $x = 12 - y$: si on met successivement pour y, 1, 2, $3\frac{1}{2}$..... On trouvera $x = 11$, 10, $8\frac{1}{2}$..... De sorte que 11 et 1, 10 et 2, $8\frac{1}{2}$ et $3\frac{1}{2}$..... satisfont à la question.

Lorsqu'on a plus d'inconnues que d'équations ; on verra qu'on ramène toujours le problème à une équation, et plusieurs inconnues, de sorte qu'on peut disposer arbitrairement de toutes celles-ci, une exceptée.

112. Lorsqu'on a un nombre égal d'inconnues et d'équations, on peut opérer de trois manières.

I. On tirera de chaque équation la valeur d'une inconnue comme si le reste étoit connu ; on égalera ces valeurs deux à deux, et on formera ainsi autant d'équations moins une, qu'on en avoit d'abord : après quoi il ne s'agira que de répéter ce procédé, qui *Éliminera* chaque

fois une inconnue ; puis lorsqu'on aura obtenu la valeur de la dernière, on remontera de proche en proche pour avoir celles des autres.

Ainsi, pour $5x - 3y = 1$, $7y - 4x = 13$; on tirera

de la première $x = \frac{3y+1}{5}$,

et de la seconde $x = \frac{7y-13}{4}$:

égalant ces valeurs, on a $\frac{3y+1}{5} = \frac{7y-13}{4}$ équation qui ne renferme plus qu'une inconnue y, et d'où on tire $12y + 4 = 35y - 65$; puis $y = 3$: remontant à l'une des valeurs de x, il vient $x = \frac{3.3+1}{5} = 2$.

Pareillement $2x + 5y - 3z = 3$, $3x - 4y + z = -2$, $5x - y + 2z = 9$ donnent pour z les valeurs

$z = \frac{2x+5y-3}{3}$, $z = 4y - 3x - 2$, $z = \frac{9+y-5x}{2}$

égalant la seconde à la première et à la troisième, et chassant les dénominateurs (105, 1°.), on trouve. . . . . . $12y - 9x - 6 = 2x + 5y - 3$, et. . . . . $8y - 6x - 4 = 9 + y - 5x$, qu'on réduit à

$$7y - 11x = 3, \quad 7y - x = 13,$$

on en tire des valeurs de y, qui, égalées donnent $3 + 11x = 13 + x$, d'où $x = 1$; et remontant aux valeurs de y et z ci-dessus, on trouve enfin . . . . $y = \frac{3+11}{7} = 2$, $z = \frac{2+2.5-3}{3} = 3$.

II. La méthode des *Substitutions* consiste à tirer comme ci-dessus la valeur de l'une des inconnues ; puis à la substituer dans les autres équations ; ce qui donne une équation et une inconnue de moins : et on réitère le même procédé.

L'autore eghera un gran Pipi
e un opera nulla vae! Perdona,
Geppino.

Soient $3x + 2y = 12$, $2z + y = 5$, $x + y + 3z = 8$; la seconde donne $y = 5 - 2z$: en substituant dans les deux autres, elles deviennent $3x - 4z = 2$, $x + z = 3$. Celle-ci donne $x = 3 - z$, ce qui change l'autre en. . . . . . $9 - 3z - 4z = 2$, d'où $z = 1$, et par suite . . . . . . $x = 3 - z = 2$, $y = 5 - 2z = 3$.

III. Le premier procédé, quoique plus simple que les autres est rarement employé à cause de sa longueur : le second ne sert guères que quand toutes les inconnues n'entrent pas dans les équations ; venons maintenant à celui qui est le plns usité. Prenons

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c' \ldots\ldots \quad (A).$$

Supposons que a et a' soient égaux, en soustrayant l'une de ces équations de l'autre, x disparoîtra : si a et a' étoient de signes contraires, il faudroit ajouter les équations. Mais lorsque a et a' ne sont pas égaux, on multipliera la première par a', la seconde par a, et notre condition sera remplie puisque aa' sera le coefficient commun de $x =$ (*). On obtiendra donc en retranchant

$$a'by - ab'y = a'c - ac', \quad \text{d'où } y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

On pourroit trouver x, en substituant cette valeur dans l'une des proposées, mais il est plus court d'éliminer y à son tour, par la même voie. Ainsi

$$x = \frac{c'b - cb'}{a'b - ab'}, \quad y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \ldots \quad (B).$$

(*) Si a et a' ont un facteur commun, les multiplicateurs respectifs seront plus simples, comme pour la réduction au même dénominateur (34).

113. En traitant de la même manière les équations

$$\left.\begin{array}{l} a x + b y + c z = d, \\ a'x + b'y + c'z = d', \\ a''x + b''y + c''z = d''... \end{array}\right\} \quad (C)$$

qui sont les plus générales à trois inconnues, on trouveroit les valeurs de x, y, et z. Mais ce calcul ne permettroit pas de découvrir la loi des résultats sans recourir à l'induction ; c'est pourquoi nous le présenterons d'une manière un peu différente. Multiplions la première par k, la deuxième par k', et de la somme de ces produits, retranchons la troisième ; il viendra

$$\begin{array}{l}(ka + k'a' - a'')\ x + (kb + k'b' - b'')\ y \\ + (kc + k'c' - c'')\ z = kd + k'd' - d''. \end{array}$$

Les nombres k et k' étant arbitraires, on peut en disposer de manière à chasser deux inconnues, y et z, par exemple. On posera pour cela les équations

$$kb + k'b' = b'' \quad kc + k'c' = c'' \ldots. \quad (D),$$

qui serviront à connoître k et k'; et on aura

$$x = \frac{kd + k'd' - d''}{ka + k'a' - a''} \ldots\ldots \quad (E).$$

Il faut ensuite déterminer k et k', et en substituer ici les valeurs ; mais on peut abréger beaucoup ce calcul. En effet, le numérateur de x se déduit du dénominateur en changeant $a\,a'\,a''$ en $d\,d'\,d''$; et comme k et k' sont indépendans de ces quantités la même chose aura lieu également après la substitution des valeurs de k et k'.

Il s'agit simplement d'évaluer le dénominateur ; les formules B appliquées aux équations D, donnent

$$k = \frac{b'c'' - c'b''}{cb' - bc'}, \quad k' = \frac{cb'' - bc''}{cb' - bc'};$$

d'où $$ka + k'a' - a'' = \frac{a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'')}{cb' - bc'} - a''.$$

On réduira au même dénominateur, qu'on supprimera comme étant commun aux deux termes de la fraction E; et on aura

$$a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb').$$

En faisant attention à la manière dont il faut exécuter ces multiplications, on observera que le calcul se réduit à l'opération suivante. On prendra la différence $bc - cb$, entre les arrangemens des lettres b et c; puis on introduira la lettre a à toutes les places, en commençant par la première à gauche; puis on changera de signe chaque fois que c changera de place; bc engendrera abc, $-bac$ et $+bca$; $-cb$ donnera $-acb$, $+cab$ et $-cba$. On aura donc $abc - bac + bca - acb + cab - cba$. Enfin, on marquera d'un trait la seconde lettre de chaque terme, et de deux la dernière, et on aura le dénominateur K.

$$ab'c'' - ba'c'' + bc'a'' - ac'b'' + ca'b'' - cb'a'' = K.$$

Pour trouver y, il faudroit égaler pareillement à zéro les coefficiens de x et z dans l'équation ci-dessus, mais la symétrie des calculs prouve qu'il suffit de changer b en a, et réciproquement dans la valeur de x. Le même raisonnement a lieu aussi pour z. Concluons de là que, 1°. *le dénominateur des valeurs de* x, y *et* z *est le même*; 2°. *le numérateur de chacune se déduit du dénominateur en changeant les coefficiens de l'inconnue en les termes connus.* Ainsi

$$x = \frac{db'c'' - bd'c'' + bc'd'' - dc'b'' + cd'b'' - cb'd''}{K}$$

$$y = \frac{ad'c'' - da'c'' + dc'a'' - ac'd'' + ca'd'' - cd'a''}{K}$$

$$z = \frac{ab'd'' - ba'd'' + bd'a'' - ad'b'' + da'b'' - db'a''}{K}$$

La loi que nous avons démontrée suit de la nature même du calcul ; en sorte que si on avoit quatre inconnues et quatre équations,

$$ax + by + cz + dt = f, \quad a'x + b'y + c'z + d't = f', \text{ etc.}$$

il suffiroit de chercher le dénominateur commun, et on en déduiroit chaque numérateur ; de plus, ce dénominateur seroit formé suivant la même loi.

On prendroit donc les six arrangemens des lettres *abc* qui servent de dénominateur ci-dessus (en supprimant les accens), on auroit $abc - bac + bca -$ etc. : on feroit occuper à la lettre d, dans chacun de ces termes, toutes les places, à commencer par la dernière à gauche ; puis on changeroit de signe chaque fois que d passeroit d'une place à la suivante ; enfin on marqueroit d'un trait la seconde lettre, la troisième de deux, et enfin la dernière de trois : le dénominateur commun seroit donc

$$da'b''c''' - ad'b''c''' + ab'd''c''' - ab'c''d''' - db'a''c''' + bd'a''c''' - \text{etc.}.$$

Voy. un très-beau mémoire de Laplace, Acad. des Sciences, année 1772, 2ᵉ. partie, page 294.

114. Voici quelques problèmes à résoudre.

I. Une personne a des jetons dans ses mains ; si elle en porte un de la droite dans la gauche, il y en aura un nombre égal dans chacune, mais si elle en passe

deux de la gauche dans la droite, celle-ci en contiendra le double de l'autre : on demande combien chaque main en contient. On trouve $x-1=y+1$ et $x+2=2(y-2)$; d'où $x=10$ et $y=8$.

II. On a acheté trois bijoux dont on demande les prix; on sait que celui du 1er. plus la moitié du prix des deux autres fait 25 napoléons ; le prix du 2e. plus le tiers du prix du 1er. et du 3e. fait 26 napoléons ; enfin le prix du 3e. plus la moitié du prix des deux autres fait 29 napoléons. On a

$$x+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}z=25,\ y+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{3}z=26,\ z+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y=29,$$

d'où on tire $x=8$, $y=18$, $z=16$.

III. A, B et C ont un certain nombre d'écus; A distribuant des siens à B et C leur en donne autant qu'ils en avoient déja ; B double à son tour ceux qui restent à A et ceux que C a entre les mains ; enfin C distribuant à A et B, double pareillement le nombre qu'ils se trouvent avoir; tout cela fait, chacun se trouve en avoir 16 ; on demande combien ils en avoient d'abord. x, y et z désignant les nombres d'écus respectifs de A, B et C, on a

$$x-y-z=4,\quad 3y-x-z=8,\quad 7z-x-y=16,$$

d'où on tire $x=26$, $y=14$, $z=8$.

IV. *La règle d'Alliage* rentre dans cette théorie.

1°. Supposons qu'on mêle ensemble deux substances qui n'éprouvent pas d'action chimique ; soient p et q les prix de l'unité de mesure de chacune ; celui du mélange sera $px+qy$, en désignant par x et y les nombres d'unités des deux substances : mais le tout est composé de $x+y$ unités ; donc le prix de chacune est

$$z = \frac{px + qy}{x + y} \dots (F)$$

Ainsi 8 bouteilles de vin à 15$^{\text{f.}}$ le litre et 12 à 10$^{\text{f.}}$, font 20 bouteilles dont le prix est $8 \times 15 + 12 \times 10 = 240^{\text{f.}}$; donc le prix de chacune est $\frac{240}{20}$ ou 12$^{\text{f.}}$

On a un lingot d'or formé de 4 kil. à 0,95 de fin (*) et de 5 kil. à 0,86; on en demande le titre; la formule ci-dessus donne $\frac{4 \times 0{,}95 + 5 \times 0{,}86}{4+5}$ ou $\frac{8{,}1}{9} = 0{,}9$.

2°. réciproquement, si on demande quelle doit être la composition du mélange, la valeur moyenne étant donnée; on cherchera les quantités x et y, connoissant les prix p, q et z; alors l'équation F contient deux inconnues, et le problême est indéterminé. On a $x = \left(\frac{z-q}{p-z}\right)y$; ainsi on y satisfait en prenant

$$x = z - q, \quad y = p - z;$$

z est d'ailleurs intermédiaire entre p et q. On pourra, outre ces valeurs, en trouver une infinité d'autres, en les multipliant ou divisant par un même nombre quelconque:

(*) Lorsque l'or ou l'argent contiennent 0,1 d'alliage et que le reste est pur, on dit que le métal est à 0,9 de fin. Autrefois le degré de pureté s'estimoit différemment; on partageoit par la pensée le lingot d'or en 24 parties, qu'on nommoit *karats*, de sorte que l'or à 21 karats, contenoit 3 parties d'alliage et 21 d'or pur. Le karat se divisoit en 32 parties ou *grains*; ainsi on désignoit par 18 k. 20 gr., 18 parties et $\frac{20}{32}$ d'or pur, et le reste d'alliage. L'argent se divisoit en 12 parties ou *deniers*, chacune de 24 *grains*; ainsi un lingot d'argent à 10 d. 20 gr. contenoit 10 parties $\frac{20}{24}$ de métal pur et $1\frac{4}{24}$ d'alliage.

on aura par là toutes les solutions entières de la question, si ce nombre est entier (117).

Un boulanger, par exemple, veut faire du pain qui revienne à 8 s. le kilogramme; combien doit-il mêler de farine de blé à 10 s., et de seigle à 7 s. le kilogramme. Après avoir écrit ces nombres comme on le voit ci-contre, on

Prix moyen 8 { 10..1..Blé.
7..2..Seigle.

mettra 8 — 7 ou 1 à côté de 10; puis 10 — 8 ou 2 près de 7. Ainsi on prendra 1 kil. de farine de blé sur 2 de seigle. On peut aussi prendre 2 sur 4, ou 3 sur 6, etc.

Si on donnoit une seconde condition, pour déterminer le problème, on la traduiroit algébriquement; et on élimineroit x et y entre l'équation F et cette dernière. Ainsi lorsque la masse $x+y$ du mélange est donnée $=m$; alors on a $x+y=m$, $+qy=zm\,px$; d'où

$$x=\frac{m}{p-q}(z-q),\quad y=\frac{m}{p-q}(p-z).$$

Après avoir obtenu les valeurs ci-dessus, on les multipliera donc par $\frac{m}{p-q}$. Dans notre exemple, si on veut que le mélange des farines pèse 21 kil., on multipliera les résultats obtenus 1 et 2, par $\frac{21}{10-7}=7$; de sorte que 7 kil. de farine de blé à 10 s., mêlée à 14 de seigle à 7 s. forment 21 kil. de farine à 8 s.

De même soit demandé de former 7,54 kil. d'argent à 0,9 de fin avec de l'argent à 0,97 et 0,84. L'opération prouve qu'il faut 3',48 de la 1re. et 4,06 de la 2e. espèce.

$$0{,}9\left\{\begin{array}{l} 0{,}97\ldots0{,}06\times\frac{7{,}54}{0{,}13}=3{,}48 \\ 0{,}84\ldots0{,}07\times\frac{7{,}54}{0{,}13}=4{,}06 \end{array}\right.$$

On appliquera facilement cette théorie au cas où on voudroit mêler ensemble plus de deux substances.

115. Les valeurs des inconnues présentent quelques particularités qu'il convient d'examiner. Reprenons le cas de deux inconnues, auquel les autres se ramènent.

1°. x ou y peut être négatif; alors le problème est absurde, (comme 108), et on peut le rendre possible à l'aide d'une modification : le calcul réduit en effet la question à n'avoir qu'une inconnue.

2°. Lorsque les formules B, n°. 112, sont infinies, les coefficiens sont tels que $a'b - ab' = 0$. Pour connoître alors la nature de la question, il faut introduire cette condition dans les équations A : mettant donc $\frac{ab'}{b}$ pour a', la seconde devient $\frac{ab'}{b}\,x + b'y = c'$; ainsi, pour que le cas présent ait lieu, il faut que les équations proposées soient $ax + by = c$, $b'(ax + by) = bc'$, conditions qui ne sont compatibles qu'autant qu'on a $b'c = bc'$. Si donc cette équation n'a pas lieu, *le problême est absurde;* on remarque que dans ce cas, *x et y sont infinis.*

3°. Mais si outre $a'b = ab'$, on a encore $b'c = bc'$, les deux équations A n'équivalent plus qu'à une seule, parce que les conditions données rentrent l'une dans l'autre : *le problême est indéterminé.* En éliminant b entre $a'b = ab'$ et $b'c = bc'$, on a $a'c = ac'$; ainsi, *les valeurs de x et y se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.*

Prenons, pour exemple, ce problême : deux courriers partent l'un de A, l'autre de B, et vont dans le même sens AC; le premier fait n kil. par heure, le second m; la distance initiale est $AB = d$; cherchons le lieu C de leur rencontre. Fig. I.

Fig. 1. Soient $AC=x$, $BC=y$; $\frac{x}{n}$ et $\frac{y}{m}$ sont les tems qu'emploient les courriers à parcourir les espaces AC et BC; ainsi $\frac{x}{n}=\frac{y}{m}$: de plus $AC=AB+BC$, ou $x=d+y$; donc $mx=ny$ et $x=d+y$, d'où

$$x=\frac{nd}{n-m} \qquad y=\frac{md}{n-m};$$

le tems écoulé jusqu'à la rencontre est $\frac{x}{n}=\frac{d}{n-m}$.

Cela posé, si $n>m$, x et y sont positifs, et il n'y a pas de difficulté. Mais si $n<m$, le problème est absurde, puisque x et y sont négatifs : on voit en effet que le mobile A, qui est en arrière, allant moins vîte, la rencontre est impossible.

Changeons x et y de signe, dans $mx=ny$ et $x=d+y$; cette dernière équation sera seule altérée et deviendra $y=d+x$, qui se rapporte à deux problèmes : 1°. ou le point B est en arrière de A, tel qu'en B' : 2°. ou on suppose que A et B ne sont pas les points de départ, et que les courriers déja partis depuis longtems, sont arrivés ensemble, l'un en A; l'autre en B; on demande alors le lieu C' où ils se sont déja rencontrés.

Si $m=n$, x et y sont infinis, et le problème est absurde : ce qui vient de ce que les courriers, ayant la même vîtesse, ne peuvent se rencontrer. Cependant si $d=0$, x et y sont $\frac{0}{0}$, et il y a une infinité de points de rencontre; et en effet les mobiles partent du même point sans jamais se séparer.

En changeant le signe de m, on traiteroit le cas où les courriers vont au-devant l'un de l'autre. Il sera facile de trouver de même en quel lieu les courriers sont à une distance donnée k l'un de l'autre.

4. *Des Problêmes indéterminés.*

116. La question admet une infinité de solutions, lorsqu'on a n équations et un plus grand nombre d'inconnues, puisqu'on peut disposer arbitrairement de 1, 2, 3... d'entre elles, de sorte qu'il n'en reste plus que n.

Soient, par exemple, demandés trois nombres x, y et z dont la somme soit 105, et qui aient même différence; on a $x+y+z=105$, $x-y=y-z$: éliminant x, il vient $y=35$, d'où $x+z=70$. On fera donc z ou x égal à tel nombre qu'on voudra, il en résultera avec $y=35$, une solution du problême.

91. Si on a au contraire plus d'équations que d'inconnues, en éliminant celles-ci, on aura des relations entre les données; c'est ce qu'on nomme des *équations de condition;* la question est absurde, si elles ne sont pas satisfaites; et si elles le sont, les équations rentrent les unes dans les autres, et se réduisent à un nombre égal à celui des inconnues.

Cherchons deux nombres x et y dont la somme soit s, la différence d, et le produit p. Nous aurons $x+y=s$, $x-y=d$ et $xy=p$: les deux premières (107, IV) donnent $x=\frac{1}{2}(s+d)$, $y=\frac{1}{2}(s-d)$, substituant dans la troisième, on trouve $4p=s^2-d^2$. Si les données ne satisfont pas à cette équation de condition, le problême est absurde; autrement l'une des équations proposées exprime une relation qui a lieu d'elle même.

117. Cherchons tous les systêmes de valeurs *entières* de x et y qui satisfont à l'équation indéterminée

$$ax+by=c\ldots\ldots(1)$$

Nous supposerons a et b premiers entre eux, car s'ils

avoient un commun diviseur d, il devroit aussi diviser c, puisque le premier membre de $\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y=\frac{c}{d}$ est entier : l'équation seroit réductible à de moindres termes.

Soient $x=\alpha$, $y=\beta$ une solution de l'équation ; on a $a\alpha+b\beta=c$; retranchant de $ax+by=c$, on trouve . . $x-\alpha=-\frac{b}{a}(y-\beta)$. Puisque b et a sont premiers entre eux, $y-\beta$ doit être divisible par a (33, 4°.) ; d'où $y-\beta=at$ et $x-\alpha=-bt$, t étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Il est même visible que ces valeurs satisfont seules au problême, parce qu'elles expriment seules que $y-\beta$ est multiple de a. Ainsi,

$$x=\alpha-bt \qquad y=\beta+at\ldots.(2)$$

Si donc on avoit l'une des solutions, on connoîtroit toutes les autres. En faisant $t=0, 1, 2, \ldots -1, -2, \ldots$ *les valeurs de* x *et de* y *formeront des progressions par différence dont les coefficiens réciproques* b *et* a *sont les raisons* (l'une sera croissante et l'autre décroissante, si a et b sont de même signe).

118. Il reste à trouver α et β; pour cela résol $ax+by=c$, par rapport à x; on suppose $a<b$. vient $x=\frac{c-by}{a}$. Divisons c et b par a, pour extraire les entiers k et l contenus dans $\frac{c}{a}$ et $\frac{b}{a}$; c' et b' désignant les restes, on a

$$x=k-ly+\frac{c'-b'y}{a}.$$

Il ne s'agit plus que d'assigner les valeurs de y qui rendent entière la quantité $\frac{c'-b'y}{a}$.

Si $b'=1$, alors en faisant $\frac{c'-y}{a}=z$, on a . . . . $y=c'-az$; en prenant pour z tous les nombres entiers, tant positifs que négatifs, on trouve pour x et y toutes les solutions entières du problême.

Mais si b' n'est pas un, en posant $\frac{c'-b'y}{a}=z$, on a

$$az+b'y=c',$$

équation qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers, et dont les coefficiens sont moins composés que dans (1). En résolvant de nouveau par rapport à y, et extrayant les entiers, on tombera de même sur une équation à deux inconnues; et en continuant ainsi on diminuera successivement les coefficiens qui seront les divers restes qu'on obtient dans le calcul du commun diviseur entre a et b. On sera donc conduit à une équation de la forme $v+mt=n$, qu'on traitera comme pour le cas où b' est $=1$.

Un exemple éclairera cette théorie. Soit $12x-67y=1000$, on a $x=\frac{1000+67y}{12}=83+5y+\frac{4+7y}{12}$: faisons $\frac{4+7y}{12}=z$, d'où $y=4\times\frac{3z-1}{7}$; posons encore $\frac{z-1}{7}=u$; il vient $z=2u+\frac{u+1}{3}$; enfin . . . . . $\frac{u+1}{3}=t$, donne $u=3t-1$. Si donc on fait $t=0$, on trouve $u=-1$, $z=2u+t=-2$, $y=4u=-4$, enfin $x=61$, et par conséquent d'après les équations (2)

$$x=61+67t \qquad y=-4+12t$$

on auroit pu attribuer à t toute autre valeur, et on auroit obtenu des résultats équivalens, en observant qu'on peut ici mettre $t+n$ pour t, n étant un entier quelconque.

donc $t = \ldots\ldots -2, -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2\ldots$
donne $x = \ldots\ldots -73, -6, \quad 61, 128, 195\ldots$
$y = \ldots\ldots -28, -16, -4, \quad 8, \quad 20\ldots$

Ces calculs sont quelquefois fort longs, mais on peut beaucoup les abréger; c'est ainsi que $\frac{4+7y}{12}$ et y devant être entiers, $7\left(\frac{4+7y}{12}\right)$ et $\frac{48y}{12}$ le seront aussi, de même que la différence de ces quantités, qui est $\frac{28+y}{12}$; on posera donc de suite $\frac{4+y}{12} = t$, ce qui conduit aux mêmes valeurs de x et y.

Au reste, consultez le n°. 546, où on donnera des moyens plus expéditifs.

119. Il arrive souvent qu'on ne veut admettre que les solutions positives; en général, les expressions (2) donnent deux limites de t; l'une qu'on tire de $\alpha - bt > 0$, l'autre de $\beta + at > 0$ (*). On résout ces inégalités à la manière des équations (105), parce que les raisonnemens sont les mêmes. On voit qu'il se présente alors deux cas.

(*) Nous regarderons les quantités négatives comme étant < 0; ce n'est pas qu'en effet on puisse rien concevoir de plus petit que zéro; mais lorsqu'on fait varier y dans la quantité $a - y$, à mesure que y croît, elle s'approche de plus en plus de 0, et elle devient nulle lorsque $y = a$; y continuant de croître, $a - y$ devient négatif et croît aussi; or lorsqu'on veut prendre pour y une valeur telle que $a - y$ soit négatif, il faut que y soit $> a$, ce qui revient à supposer $a - y < 0$, et à soumettre cette expression aux mêmes calculs que les équations : mais on ne pourra changer les signes, et dans cette opération on regardera $-1-2-3\ldots$ comme des quantités décroissantes : $a > b$ donnera $-a < -b$. Il est facile de voir qu'en général dans tous les cas semblables on pourra regarder les quantités négatives comme < 0.

1°. Si l'une des limites est comprise dans l'autre (comme si on avoit $t > 5$ et $t > 3$) alors c'est comme s'il n'y en avoit qu'une seule, et la question admet une infinité de solutions : x et y croissent ensemble ; a et b sont de signes contraires.

2°. Si l'une des limites est en excès et l'autre en défaut (comme si on trouve $t < 12$ et $t > 3$) alors on ne peut donner à t que les valeurs intermédiaires, et le nombre des solutions est fini ; dans ce cas x croît, y décroît ; a et b sont de même signe. Il pourrait même se faire que les limites s'excluassent l'une l'autre (comme $t < 12$ et $t > 15$) alors la question seroit absurde.

Dans notre exemple, on posera $61 + 67t > 0$ et $-4 + 12t > 0$, d'où on tire $t > -\frac{61}{67}$ et $t > \frac{4}{12}$ ou $\frac{1}{3}$. Il est clair qu'on ne satisfera à ces deux conditions qu'autant qu'on prendra $t > 0$ ou $t = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu.

120. Voici divers exemples de cette théorie.

I. Partager 117 en deux parties dont l'une soit multiple de 19 et l'autre de 7. On a $19x + 7y = 117$; d'où $y = \frac{117 - 19x}{7}$; donc $\frac{5 - 5x}{7}$ ou $\frac{5(1 - x)}{7}$ est un nombre entier. Faisons $\frac{1 - x}{7} = t$, il viendra

$$x = 1 - 7t \text{ et } y = 14 + 19t.$$

Si on veut que les parties de 117 soient positives, il faudra en outre qu'on ait $1 - 7t > 0$ et $14 + 19t > 0$, d'où $t < \frac{1}{7}$ et $> -\frac{14}{19}$. On ne peut alors satisfaire au problème que d'une manière; $t = 0$, donne $x = 1$ et $y = 14$; de sorte que 19 et 98 sont les parties demandées.

II. Payer 2000 fr. en draps de deux espèces, l'une à 9 fr., l'autre à 13 fr. le mètre. On trouve $9x + 13y = 2000$,

d'où $x = \frac{2000 - 13y}{9}$: il faut rendre $\frac{2 - 4y}{9}$, ou $\frac{1 - 2y}{9}$, un nombre entier ; ainsi $\frac{1 - 2y}{9} = z$, d'où $y = \frac{1 - 9z}{2}$; puis $\frac{1 - z}{2} = t$ et $z = 1 - 2t$. En faisant $t = 0$, on a $z = 1$, $y = -4$, $x = 228$; donc

$$x = 228 - 13t,\ y = -4 + 9t.$$

Pour que x et y soient positifs, il faut que l'on ait $228 - 13t > 0$ et $-4 + 9t > 0$; d'où $t < 18$ et > 0. En faisant $t = 1, 2, 3 \ldots 17$, on a pour les 17 solutions de la question $x = 215, 202, 189 \ldots\ldots 7$; . . . . $y = 5, 14, 23, \ldots 149$. Ainsi, on peut donner 215 m. de drap à 9 fr., et 5 m. à 13 fr. ; ou, etc.

III. Un négociant a changé des roubles estimés 4 fr. contre des ducats de 9 fr. ; il a donné 15 fr. en sus ; on demande combien de sortes de marchés, il a pu faire. On a $9y = 4x + 15$, d'où $x = \frac{9y - 15}{4}$; ainsi $\frac{y - 3}{4} = t$, d'où $y = 4t + 3$ et $x = 9t + 3$. Lorsqu'on veut que x et y soient positifs les limites de t coïncident, et on a $t > -1$: faisant $t = 0, 1, 2, \ldots$ on a un nombre infini de solutions renfermées dans les séries $x = 3, 12, 21 \ldots$ $y = 3, 7, 11, \ldots$ on a donc pu changer 3 roubles contre 3 ducats, ou 12 roubles contre 7 ducats ; etc.

IV. $6x - 12y = 7$ ne peut être résolu en nombres entiers.

V. Il en est évidemment de même pour $2x + 3y = -10$, si x et y doivent être positifs : au reste, le calcul le prouve, puisqu'il donne $x = 3t - 5$ et $y = -2t$; et les limites $t > \frac{5}{3}$ et < 0 sont incompatibles.

VI. Partager en deux autres la fraction $\frac{n}{d}$, dont le dé-

nominateur d est le produit de deux nombres a et b premiers entre eux; pour cela on fera $\frac{n}{d}=\frac{x}{b}+\frac{y}{a}$, et on devra résoudre en nombres entiers l'équation $ax+by=n$.

Ainsi, pour $\frac{58}{77}$, comme $77=11\times 7$, on a $11x+7y=58$, d'où $x=7t-3$, $y=13-11t$; il y a un nombre infini de solutions, si $\frac{58}{77}$ doit être la différence des deux fractions cherchées; mais si elle en est la somme, il n'y en a qu'une qui répond à $t=1$; on a $\frac{58}{77}=\frac{4}{7}+\frac{2}{11}$.

La fraction $\frac{391}{924}$, dont le dénominateur $=4.3.7.11$, se décompose d'abord en $\frac{1}{4}+\frac{40}{231}$; celle-ci en ..... $\frac{2}{3}-\frac{38}{77}=\frac{2}{3}+\frac{39}{77}-1$; enfin $\frac{39}{77}=\frac{1}{7}+\frac{4}{11}$; donc ... $\frac{391}{924}=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{7}+\frac{4}{11}-1$.

VII. Faire 50 s. avec des pièces de 2 s. et de 18 d. Soient x le nombre des pièces de 2 s., et y celui des pièces de $\frac{3}{2}$ s.; on a $2x+\frac{3}{2}y=50$, ou $4x+3y=100$: on en tirera $x=1-3t$ et $y=32+4t$; en faisant $t=0,-1,-2$ jusqu'à -8, on a $x=1, 4, 7, \ldots\; y=32, 28, 24$. Si on prenoit aussi les valeurs négatives de x ou de y, alors les pièces de 2 s. seraient données en échange de celles de 18 d., de manière à produire 50 s. de différence.

121. La même méthode s'applique lorsqu'il y a 3, 4,.... inconnues et autant d'équations moins une. En voici divers exemples.

VIII. Quel est le nombre N qui divisé par 5 et par 7, donne 4 et 2 pour restes? Désignons par x et y les quotiens respectifs, nous aurons

$$N=5x+4,\quad N=7y+2,\quad \text{d'où}\quad 7y-5x=2,$$

on résout cette équation par les moyens indiqués, et on a $x=7t+1$ et $y=5t+1$, ce qui donne $N=35t+9$. Le nombre demandé est l'un de ceux-ci 9, 44, 79,.....

IX. En quelle année a-t-on eu 17 de cycle solaire et 6 de cycle lunaire? Le *Cycle Solaire* ou *des Lettres Dominicales* est une révolution de 28 années, après lesquelles chaque jour de la semaine revient à la même date du mois. Le *Cycle Lunaire* ou *Nombre d'or* est une période de 19 ans après lesquels les lunaisons retombent aux mêmes dates du mois. Comme les *fêtes mobiles* sont déterminées d'après le jour de Pâques, on voit que tous les 532 ans (28 × 19 ans), on doit avoir le même almanach (*). Ces deux cycles ont commencé ensemble 457 ans avant l'ère chrétienne.

Les cycles n'étant que des périodes de 28 et 19 ans, le problème revient à trouver un nombre N qui, divisé par 28 et 19, donne 17 et 6 pour restes. Soient x et y les quotiens, on a

$$N = 28x + 17,\quad N = 19y + 6,\quad \text{d'où } 19y - 28x = 11.$$

Cette équation donne

$$y = 28t + 5,\quad x = 19t + 3,\quad \text{d'où } N = 532t + 101;$$

mais comme l'origine commune de ces deux périodes a précédé de 457 ans l'ère chrétienne, l'année cherchée est $N - 457$ ou $532t - 356$. Ainsi, les années 176, 708, 1240, 1772 sont les seules qui aient pu réunir 17 de cycle solaire et 6 pour nombre d'or. Les valeurs négatives ne doivent pas être exclues.

(*) La chose n'a lieu ainsi que dans le calendrier Julien, car la réforme grégorienne a supprimé trois années bissextiles séculaires sur quatre, ce qui détruit la période de $4 \times 7 = 28$ du cycle lunaire. De même les révolutions lunaires étant déterminées d'une manière approximative seulement par la période de 19 années, on doit aussi intercaler un jour environ tous les 300 ans, ce qui en détruit la régularité. *Voy.* n°. 545.

En général, soient s et l les cycles solaires et lunaires, l'année cherchée est $N = 532\,t + 57\,s - 56\,l - 457$.

X. En comptant les feuillets d'un livre 7 à 7, il en reste 1 ; 10 à 10, il en reste 6; enfin, 3 à 3 il ne reste rien, on demande combien le livre a de feuillets? On suppose que ce nombre N est entre 100 et 300. On a

$$N = 7\,x + 1 = 3y = 10\,z + 6,$$

d'où $\quad 3y - 7\,x = 1\,,\ 3y - 10\,z = 6.$

Celle-ci donne d'abord $z = 3t'$, $y = 2 + 10\,t'$, ce qui change l'autre en $-30\,t' + 7\,x = 5$. On satisfait de nouveau à cette dernière par $t' = 7\,t + 1$ et $x = 5\,(1 + 6\,t)$; donc $N = 36 + 210\,t$. Par conséquent, si on fait $t = 0, 1, 2...$, on trouve $N = 36, 246, 456....$, ainsi le livre a 246 feuillets.

XI. Trouver un nombre qui, divisé par 2, 3 et 5, donne 1, 2 et 3 pour restes. On a

$$N = 2x + 1 = 3y + 2 = 5\,z + 3;$$

d'où $\quad 2\,x - 3y = 1$, et $2\,x - 5\,z = 2$.

La première donne $x = 3\,t' - 1$, $y = 2\,t' - 1$ ce qui change la deuxième en $6\,t' - 5\,z = 4$, d'où $z = 4 + 6t$, et par suite $N = 30\,t + 23$; ainsi $N = 23, 53, 83, 113...$

122. Lorsqu'on n'a qu'une équation et trois inconnues, on opère ainsi qu'il suit. Soit $5\,x + 8y + 7\,z = 50$. En faisant $50 - 7\,z = u$, on a $5\,x + 8\,y = u$, d'où $x = 8\,t - 3\,u$ et $y = 2\,u - 5\,t$; remettant $50 - 7\,z$ pour u, il vient

$$x = 21\,z + 8\,t - 150,\ y = 100 - 14\,z - 5\,t.$$

z et t sont des nombres entiers quelconques. Mais si x et y doivent de plus être positifs, on devra satisfaire à part à cette condition.

CHAPITRE III.

DES PUISSANCES, DES RACINES ET DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

1. *Des Puissances et Racines des Monomes.*

123. La règle donnée (96) simplifie l'élévation aux puissances, en évitant la multiplication réitérée (60) ; car soit proposé d'élever a à la puissance $m = n + p$, on a. . . . $a^m = a^n \times a^p$, de sorte qu'après avoir formé a^n et a^p, le produit donnera a^m. De même, on pourra décomposer m en trois parties $n + p + q$, d'où $a^m = a^n \times a^p \times a^q$.

Il suit des règles de la multiplication, que *pour élever un monome à une puissance, il faut multiplier l'exposant de chaque lettre par le degré de la puissance.* Ainsi

$$(2\,ab^2)^2 = 4\,a^2b^4\,;\ \left(\frac{3\,a^2b^3}{cd^2}\right)^5 = \frac{3^5\,a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}.$$

124. On tire encore de là un moyen facile de former certaines puissances des nombres ; car a^m lorsque $m = np$, revient à $a^{np} = (a^n)^p$. De même si $m = npq\ldots$, on fera la puissance n de a, la puissance p de a^n, la puissance q de a^{np}. . . De même pour l'extraction des racines : ainsi $\sqrt[12]{531441}$, comme $12 = 3.2.2$, se trouvera en prenant la racine carrée, qui est 729 ; puis celle de 729 qui est 27 ; puis enfin la racine cubique de 27, qui est. . . . . $3 = \sqrt[12]{531441}$.

125. Réciproquement *pour extraire la racine* m^e. *d'un monome, on extraira celle de chaque facteur, cette racine*

se trouve en divisant chaque exposant par m. Ainsi . . $\sqrt{(4a^2b^4)} = 2ab^2$; $\sqrt[5]{\left(\frac{243\ a^{10}b^5}{c^5d^{10}}\right)} = \frac{3a^2b.}{cd^2}$. Lorsque le degré de la racine est pair, on doit affecter cette racine du signe $\pm$, tel que pour $\sqrt{9} = \pm 3$. Cela vient de ce qu'algébriquement parlant, pour qu'un nombre m soit racine de 9, il suffit que $m^2 = 9$, ce qui a lieu soit que m ait le signe $+$ ou $-$ (p. 129). Si le degré de la racine est impair, le signe de la puissance est le même que celui de la racine $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{243} = 3$.

126. Les expressions radicales éprouvent souvent des simplifications. Ainsi $\sqrt{8} = \sqrt{(2 \times 4)} = 2\sqrt{2}$; . . . . . $\sqrt[3]{432} = 2\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{16} = 6\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{Nq^2} = q\sqrt{N}$; $\sqrt[5]{\left(\frac{c^6d^8}{a^5}\right)} = \frac{cd}{a}\sqrt[5]{cd^3}$; $\sqrt{(3a^2-6ab+3b^2)} = (a-b)\sqrt{3}$.

De même aussi $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + 2\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b} = 3\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b}$; $\sqrt[4]{x^2y} - a\sqrt[4]{x^2y} + b\sqrt[4]{x^2y} = (1-a+b)\sqrt[4]{x^2y}$. . . . . $\sqrt{75} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$; $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} + \frac{f}{g}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{ag+bf}{bg}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$; $\sqrt{27a^3b} - \sqrt{3a^3b^5} = a(3-b^2)\sqrt{3ab}$.

127. De ce que la racine d'une quantité est le produit des racines de chacun de ses facteurs (125), il suit que $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$. Donc, *pour multiplier ou diviser deux quantités affectées du même radical, il faut faire le produit ou le quotient de ces quantités et l'affecter de ce radical.* Par exemple, $\sqrt{6} \times \sqrt{8} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$;

$$\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2} ; \sqrt[n]{5x^2y^4} \times \sqrt[n]{20ax} = \sqrt[n]{100ax^3y^4} ;$$

$$\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{33}} = \frac{1}{4}\sqrt{\tfrac{11}{33}} = \frac{1}{4\sqrt{3}} ; \sqrt[n]{p} \times \sqrt[n]{-q} = \sqrt[n]{-pq} ;$$

$$\frac{\sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{bxy}} = \sqrt[n]{\frac{a}{by}};\quad a\sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^4b};$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab};$$

$$(a + \sqrt{b})^3 = a^3 + 3a^2\sqrt{b} + 3ab + b\sqrt{b};$$

$(\sqrt{a^n b^m})^2 = a^n b^m$, en supprimant le radical.

128. Comme il n'y a pas de nombre qui, multiplié par lui-même, puïsse donner un résultat négatif $-m$, $\sqrt{-m}$ représente une opération impossible : c'est ce qui lui a fait donner le nom d'*Imaginaire*. Nous aurons (139, 1°.) par la suite occasion de remarquer que ces symboles, quoique vides de sens, n'en sont pas moins importans à considérer. On les combine dans le calcul, comme s'ils étoient de véritables quantités, en les assujétissant aux mêmes règles. Mais alors le principe précédent doit éprouver quelques modifications : ainsi. . . . $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, n'étant autre chose que le carré de $\sqrt{-a}$, est visiblement $-a$: or la règle ci-dessus sembleroit donner pour produit $\sqrt{+a^2}$ ou a. Mais observons que $\sqrt{a^2}$ est ou $+a$, ou $-a$; l'incertitude du signe en général, n'a lieu que lorsqu'on ignore si a^2 provient du carré de $+a$, ou de celui de $-a$: or, c'est ce qui ne peut exister ici, et on a $-a$ pour produit.

Concluons de là que $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$. De même $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ revient à $\sqrt{a}.\sqrt{-1} \times \sqrt{b}.\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{ab}$.

On verra que $\sqrt{-a}$ et $-\sqrt{-a}$ ont pour puissances 1, 2, 3, 4 $\sqrt{-a}, -a, -a\sqrt{-a}, +a^2, +a^2\sqrt{-a}, -a^3,$ $-\sqrt{-a}$ $-a, +a\sqrt{-a}, a^2, -a^2\sqrt{-a}, -a^3$......, le carré de $1 + \sqrt{-1}$ se réduit à $2\sqrt{-1}$. Le cube de $-1 + \sqrt{-3}$ est 8. Le produit de . . . .

$x + a + b\sqrt{-1}$ par $x + a - b\sqrt{-1}$ est $(x + a)^2 + b^2$, quantité *Réelle.*

129. Il suit de la règle (127) que *pour élever à une puissance un monome déja affecté d'un radical, il faut élever à cette puissance chaque facteur sous le radical.* Ainsi le cube de $\sqrt{3ab}$ est $\sqrt{27a^3b^3}$; celui de $\sqrt{2}$ est $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Concluons de là, que lorsqu'on veut extraire une racine d'un monome déja affecté d'un radical, il faut, s'il se peut, extraire la racine de la quantité radicale; ou, dans le cas contraire, multiplier l'indice du radical par le degré de la racine à extraire. Ainsi, la racine cubique de $\sqrt[3]{a^5}$ est $\sqrt[9]{a^5}$; $\sqrt[r]{(\sqrt[p]{a^n})} = \sqrt[rp]{a^n}$; $\sqrt{(\sqrt{a^2b^6})} = \sqrt[3]{ab^2}$.

130. *On peut donc, sans changer la valeur d'une quantité radicale, multiplier ou diviser par un même nombre les exposans et l'indice du radical;* puisque c'est d'une part élever à la puissance, et de l'autre extraire la racine; $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$; $\sqrt{a^3} = \sqrt[6]{a^9}$; $\sqrt{3a^2b^3} = \sqrt[4]{9a^4b^6}$.

Par là, il devient facile de multiplier et diviser les quantités affectées de radicaux différens; car il suffit de les réduire à être de même degré; on les multipliera pour cela respectivement par des nombres convenables, comme pour la réduction des fractions au même dénominateur (34). Par exemple,

$$\sqrt{a} . \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[6]{b^2} = \sqrt[6]{a^3b^2};$$

$$\sqrt[m]{a^p} . \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{pn} b^{qm}}; \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}};$$

$$\frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{s}{t}} : \frac{c}{d} \sqrt[n]{\frac{y}{z}} = \frac{ad}{bc} \sqrt[mn]{\frac{s^n z^m}{t^n y^m}}.$$

2. *Des Exposans négatifs et fractionnaires.*

131. Nous avons dit que le quotient de $\frac{a^m}{a^n}$ est a^{m-n}; mais il faut que m soit $>n$; car sans cela, $m-n$ seroit négatif, et comme on ignore encore le sens qu'on doit attacher à a^{-p}, on ne pourroit multiplier a^{-p} par a^m ; ainsi on ne sauroit prouver que $a^n \times a^{m-n}$ doit reproduire a^m.

Mais remarquons que l'expression a^{-p} ne peut rien signifier et n'a aucun sens par elle-même, puisqu'on ne peut y attacher l'idée propre aux exposans (12). On est donc le maître de désigner $\frac{1}{a^p}$ par a^{-p}, ainsi que nous le ferons dorénavant. D'après cela, dans tous les cas, on pourra dire que $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; car la chose est démontrée, si $m > n$, et elle résulte de notre hypothèse lorsque $m < n$ puisqu'en divisant les deux termes par a^m, on a . . . . . $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)}$

L'algèbre apprend à trouver des formules qui, par leur généralité conviennent à toutes les valeurs numériques qu'on peut imposer aux lettres : on doit donc regarder comme un grand avantage, de n'avoir pas besoin de distinguer, dans une expression algébrique, qui renferme des quantités de la forme $\frac{a^m}{a^n}$, tous les cas qui peuvent résulter des diverses combinaisons que fourniroient les suppositions de $m >$ ou $< n$ dans chacune : on mettra a^{m-n} au lieu de $\frac{a^m}{a^n}$, et la formule sera vraie dans toutes les hypothèses (139 1°., et 108).

Il faut aussi avoir égard au cas de $m = n$; alors a^{m-n} devient a^0, symbole tout aussi insignifiant par lui-même que a^{-p}. Nous conviendrons donc de faire $a^0 = 1$, puisqu'alors $\frac{a^n}{a^n} = 1$.

Ainsi, lorsque nous rencontrerons dans une formule a° et a^{-p}, ces expressions seront faciles à comprendre, en examinant leur origine : a° et a^{-p} n'ont pu provenir que d'une division $\frac{a^m}{a^n}$, dans laquelle on avoit $m = n$ dans le premier cas, et $n = m + p$ dans le second. D'après cette convention, *on peut faire passer un facteur du dénominateur au numérateur, en donnant à son exposant un signe négatif : de plus, l'expression* a° *est un symbole équivalent à l'unité*. Ainsi $a^{\circ} = b^{\circ} = (p+q)^{\circ} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\circ} = 1$;

$$(bc)^{-p} = \frac{1}{(bc)^p};\ \frac{1}{a} = a^{-1};$$

$$\frac{a^m b^n}{c^p d^q} = a^m b^n c^{-p} d^{-q};\ \frac{c}{f} = cf^{-1} = \frac{f^{-1}}{c^{-1}};$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = (a^3 + b^3)(a^2 + b^2)^{-1}.$$

Voilà donc les puissances nulles et négatives introduites dans le calcul, par une suite de principes qui ne souffrent aucune difficulté. Nous avons trouvé le germe de cette espèce de raisonnement dans la multiplication des fractions (40), et nous aurons par la suite de nombreuses occasions de nous en servir. Venons-en aux puissances fractionnaires.

132. La règle donnée par l'extraction des racines des monomes prouve que $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$; mais il faut pour cela que n soit un multiple de m, car on tomberoit sur un exposant fractionnaire, dont la nature est encore inconnue ; on ne pourroit démontrer qu'en rendant $a^{\frac{n}{m}}$ m fois facteur, le produit seroit a^n. On est donc ici dans le même cas que pour les exposans négatifs ; et il est visible que

$a^{\frac{n}{m}}$ n'ayant aucun sens par soi-même, on peut lui faire désigner $\sqrt[m]{a^n}$; par là les formules pourront convenir à tous les cas, que n soit ou non multiple de m; ce qui est conforme au génie de l'algèbre.

Donc, lorsque nous rencontrerons $a^{\frac{n}{m}}$ dans une formule, il sera facile d'en avoir une idée nette, en observant que cette expression n'a pu provenir que de l'extraction à faire de la racine m^e de a^n. La règle donnée pour faire cette extraction est donc générale dans tous les cas. Ainsi $\sqrt{(3a)} = (3a)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{(x^2 - y^2)} = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$;

$$b^{\frac{3}{2}} = \sqrt{b^3},\ b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b},\ c^{\frac{4}{5}}p^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{(c^4p)},$$

$$\sqrt[r]{\left(\frac{a^m b^n}{c^p}\right)} = \frac{a^{\frac{m}{r}}\ b^{\frac{m}{r}}}{c^{\frac{p}{r}}}$$

$$\sqrt[m]{\left(\frac{b^p}{c^n}\right)} = b^{\frac{n}{m}} \times c^{-\frac{n}{m}}$$

133. 1, $\frac{1}{a^p}$ et $\sqrt[m]{a^n}$ sont les valeurs de convention attribuées aux expressions a^0, a^{-p} et $a^{\frac{n}{m}}$. Mais 0, $-p$ et $\frac{n}{m}$ ne doivent point être regardées ici comme de véritables exposans, dans le sens attaché à cette dénomination; quoique ces valeurs occupent la place réservée à ceux-ci. Ce seroit donc abuser des termes que de se croire autorisé à dire, sans démonstration, que . . . . $a^m \times a^n = a^{m+n}$, quand m et n ne sont pas tous deux entiers et positifs. Il en est de même de

$$a^m : a^n = a^{m-n},\ (a^m)^p = a^{mp}\ \sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{p}}.$$

I. S'il s'agit d'exposans négatifs, on a

1°. $a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; on voit de même que $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$;

2°. $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \times a^n = a^{m+n}$; de même on trouve que $\frac{a^{-m}}{a^n} = a^{-m-n}$; et que $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{n-m}$;

3°. $(a^{-n})^p = \left(\frac{1}{a^n}\right)^p = \frac{1}{a^{np}} = a^{-np}$;

4°. $\sqrt[m]{a^{-n}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$,

II. Pour les exposans fractionnaires, on peut d'abord en multiplier les deux termes par un même nombre p; car (130) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = a^{\frac{np}{mp}}$. On peut donc réduire au même dénominateur les exposans des quantités qu'on veut multiplier ou diviser entre elles.

1°. Soit $a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{n+p}} = a^{\frac{n+p}{m}}$;

2°. $a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^n} : \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{n-p}} = a^{\frac{n-p}{m}}$;

3°. $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^p = (\sqrt[m]{a^n})^p = \sqrt[m]{a^{np}} = a^{\frac{np}{m}}$;

4°. $\sqrt[p]{a^{\frac{n}{m}}} = \sqrt[p]{(\sqrt[m]{a^n})} = \sqrt[mp]{a^n} = a^{\frac{n}{mp}}$.

On voit donc que les règles qu'on pratique sur les exposans entiers des monomes, dans la multiplication, la division, l'élévation aux puissances et l'extraction des racines sont encore vraies, quand ces exposans ne sont pas entiers. Remarquons en outre que les calculs relatifs à l'exposant fractionnaire ne le supposent pas positif.

On facilite quelquefois les calculs par ces principes; par exemple, pour diviser $\sqrt[5]{a^3b^4}$ par $\sqrt[7]{a^2b^3}$, on écrira $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{4}{5}} : a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}$, et réduisant les exposans au même dénominateur, il vient

$$a^{\frac{21}{35}}b^{\frac{28}{35}} : a^{\frac{10}{35}}b^{\frac{15}{35}} = a^{\frac{11}{35}}b^{\frac{13}{35}} = \sqrt[35]{a^{11}b^{13}}.$$

3. *Des Racines carrées et cubiques des Polynomes.*

134. 1°. Tout nombre composé de n chiffres est entre 10^n et 10^{n-1}, son carré est donc compris entre 10^{2n} et 10^{2n-2}, qui sont les plus petits nombres de $2n+1$ et $2n-1$ chiffres; donc le carré a $2n$ ou $2n-1$ chiffres, ainsi qu'on l'a dit (62).

2°. Soient a et $a+1$ deux nombres consécutifs; leurs carrés a^2 et a^2+2a+1 diffèrent entre eux de $2a+1$; ce qui est d'accord avec ce qu'on sait (66, 4°.)

3°. Lorsqu'on a poussé le calcul de l'extraction jusqu'à connoître plus de la moitié des chiffres de la racine, les autres se trouvent par une simple division, ce qui abrège sur-tout les calculs d'approximation.

En effet, soit N le nombre donné, a la partie connue de la racine, et x celle qu'on cherche; $\sqrt{N}=a+x$ donne $N=a^2+2ax+x^2$; transposant a^2 et divisant par $2a$, il vient $\frac{N-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}$. Cela posé, si x est composé de n chiffres, x^2 en aura $2n$ au plus; et comme a est suivi de n zéros, on voit que $2a$ sera $> x^2$, (et par conséquent $\frac{x^2}{2a}<1$) quand a aura plus de $2n$ chiffres, c.-à-d., quand on connoîtra plus de la moitié des chiffres de la racine. On aura donc $x=\frac{N-a^2}{2a}$, lorsqu'on ne voudra que la partie entière de $\sqrt{N}$; ce

qui arrive toujours dans les approximations et même pour les racines de nombres fractionnaires (66, 1°.).

On divisera donc $N - a^2$, ou le reste de l'opération qui a servi à trouver a, par le double de a; et pour cela, on ne regardera la partie connue de la racine que comme des unités simples, en supprimant les n zéros qui devroient être mis à sa droite, et on supprimera aussi n chiffres à la droite de N.

Ainsi, pour $\sqrt{3.75.42.98.17}$, les trois premières tranches donnent d'abord 193 pour racine, et 293 pour reste : si donc on divise 29398 par 2×193 ou 386, on aura 76 pour les deux autres chiffres de la racine.

De même, $\sqrt{2} = 1,4142$, en ne poussant l'approximation (64) qu'aux 10000es. : pour trouver 4 autres décimales, comme le reste est 3836, on divisera 38360000 par 2×14142 ou 28284 : le quotient est 1356; on trouve par ce moyen

$$\sqrt{2} = 1,41421356, \quad \sqrt{3} = 1,7320508076.$$

135. Soit proposé d'extraire la racine de

$$9a^4 - 12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$$

représentons ce polynome par X. Nous dirons, pour abréger, que le terme où la lettre a porte le plus haut exposant est *le plus grand*. Soient x le plus grand terme de la racine cherchée, y la somme des autres termes; d'où (97, 1°.), $X = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. x^2 est visiblement le plus grand terme du carré X, ainsi $x^2 = 9a^4$, ou $x = 3a^2$ pour premier terme de la racine, et $X = 9a^4 + 6a^2y + y^2$. Otant $9a^4$ des deux membres, il vient

$$-12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 = 6a^2y + y^2$$

y est en général un polynome, aussi bien que $6a^2y$: or il est clair que le plus grand terme de $(6a^2 + y) \times y$

est celui de $6a^2y$; donc $-12a^3b$ est le produit de $6a^2$ par le plus grand terme de y : ainsi ce terme sera le quotient de $-12a^3b$ divisé par $6a^2$, double de la racine trouvée. Il en résulte que $-2ab$ est le second terme de la racine.

Pour achever le calcul, faisons $3a^2-2ab$, ou. . . $x-2ab=x'$, et désignons par y' les autres termes de la racine. On a $X=x'^2+2x'y'+y'^2$; ôtons x'^2 de part et d'autre : or x'^2 se compose de x^2, déja ôté de X, puis de $-2x.2ab+(2ab)^2$, ou $-2ab(2x-2ab)$. Si donc on écrit le second terme $-2ab$ de la racine, à côté de $6a^2$, double du premier, et si on multiplie par $-2ab$, en retranchant le produit du reste ci-dessus, on aura

$$30a^2b^2-20ab^3+25b^4=2x'y'+y'^2\,;$$

y' est aussi, en général, un polynome, et il est aisé de voir que le plus grand terme $30a^2b^2$ est celui de $2x'y'$, c.-à-d., est le produit du plus grand terme de $2x'$ par celui de y'. Si donc on divise $30a^2b^2$ par $6a^2$, $5b^2$ sera le troisième terme de la racine.

Faisons $3a^2-2ab+5b^2$ ou $x'+5b^2=x''$, et désignons par y'' la somme des autres termes de la racine : on aura $X-x''^2=2x''y''+y''^2$; or, pour retrancher x''^2 de X, comme on a déja ôté x'^2, il faut du dernier reste $30a^2b^2-20ab^3+25b^4$ ôter encore $2x'.5b^2+(5b^2)^2$, ou $5b^2(2x'+5b^2)$. On écrira donc $+5b^2$ à côté du double $6a^2-4ab$ des deux premiers termes de la racine, et on multipliera par le troisième terme $5b^2$; enfin, on retranchera le produit du second reste. Comme ce produit et ce reste sont égaux, on a $X-x''^2=0$, d'ou $y''=0$ et $x''=\sqrt{X}$. Ainsi la racine demandée est $3a^2-2ab+5b^2$. Voici le type du calcul.

$$\begin{array}{l|l}
9a^4-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4 & 3a^2-2ab+5b^2 \\
-9a^4 & 6a^2-2ab \\
\text{1}^{\text{er}}\text{.reste.}-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4 & \quad -2ab \\
\quad +12a^3b-\ 4a^2b^2 & 6a^2-4ab+5b^2 \\
\text{2}^{\text{e}}\text{. reste}\ldots\ldots +30a^2b^2-20ab^3+25b^4 & \quad +5b^2 \\
\quad -30a^2b^2+20ab^3-25b^4 & \\
\quad 0 &
\end{array}$$

On voit donc qu'*après avoir ordonné le polynome proposé, il faut prendre la racine du premier terme, et continuer l'opération comme pour l'extraction numérique* (62).

136. Comme on a (97, 2°.), ... $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3y^2x+y^3$, il sera facile d'appliquer les mêmes principes à la recherche de la racine cubique d'un polynome. Nous nous bornerons à indiquer le calcul pour

$$8a^6-36a^4b^2+54a^2b^4-27b^6.$$

On prendra la racine cubique du plus grand terme $8a^6$; elle est $2a^2$, premier terme du résultat cherché. On divisera le second terme $-36a^4b^2$ par $12a^4$, triple du carré de $2a^2$; le quotient $-3b^2$ est le second terme de la racine. Pour trouver le reste, on écrira $-18a^2b^2+9b^4$ à la suite de $12a^4$; c'est le triple du produit de $2a^2$ par $-3b^2$, et le carré de $-3b^2$; ce qui donne $12a^4-18a^2b^2+9b^4$; qu'on multipliera par $-3b^2$. En retranchant du polynome proposé, il ne reste rien; ainsi la racine cubique exacte est $2a^2-3b^2$.

$$\begin{array}{l|l}
8a^6-36a^4b^2+54a^2b^4-27b^6 & 2a^2-\ 3b^2\ \text{Racine.} \\
-8a^6 & 12a^4-18a^2b^2+9b^4 \\
\text{1}^{\text{er}}\text{.reste.}-36a^4b^2+54a^2b^4-27b^6 & \quad -3b^2 \\
\quad +36a^4b^2-54a^2b^4+27b^6 & \\
\quad 0 &
\end{array}$$

Quant aux racines 4e., 5e., ... elles suivent des préceptes ci-devant exposés, et il est facile de prévoir les procédés qu'on doit appliquer. Nous reviendrons bientôt sur ce sujet (489).

4. *Equations du second degré.*

137. En passant tous les termes dans le premier membre, réduisant en un seul tous ceux qui contiennent x^2, opérant de même sur ceux qui sont affectés de x, et aussi sur tous les termes connus, l'équation du second degré prend la forme $Ax^2+Bx+C=0$; divisant tout par A et faisant $\frac{B}{A}=p$, $\frac{C}{A}=q$, on a

$$x^2+px+q=0\ldots\ldots(1)$$

équation qui peut représenter toutes celles du second degré, et dans laquelle p et q sont des nombres connus positifs ou négatifs.

Soit a un nombre qui mis pour x rend nul x^2+px+q; on a $a^2+pa+q=0$, d'où $q=-a^2-pa$: par là .... x^2+px+q est la même chose que $x^2-a^2+px-pa$, ou $(x+a)(x-a)+p(x-a)$, ou enfin

$$(x-a)\ (x+a+p).$$

Il s'agit donc de trouver toutes les valeurs de x qui rendent nul ce produit ; ainsi l'un quelconque des facteurs est nul, et on a $x-a=0$, ou $x+a+p=0$. . Concluons de là que

1°. Toute équation du second degré qui est satisfaite par une valeur a de x, en admet encore une seconde $-a-p$. Ces valeurs se nomment *Racines*, parce qu'on ne les obtient que par des extractions.

2°. La somme des deux racines a et $-a-p$ est $-p$;

leur produit est $-a^2-ap$ qu'on a vu être $=q$; ainsi, *le coefficient* p *du second terme est la somme des racines avec un signe contraire, le terme connu* q *en est le produit.*

3°. Il est facile de former une équation du second degré dont les racines k et l soient données : pour cela, on en fera la somme $k+l$ et le produit kl, et on aura $x^2-(k+l)x+kl=0$. On pourra aussi chercher le produit $(x-k)(x-l)$.

4°. La recherche des racines de la proposée (1) revient à trouver deux nombres dont la somme soit $-p$, et le produit q.

5°. Il peut arriver que les racines k et l soient égales; alors, les facteurs, $x-k$ et $x-l$ sont égaux, et x^2+px+q est le carré de l'un d'eux.

138. Résolvons l'équation (1). Pour cela, remarquons que si x^2+px+q étoit un carré, en extrayant la racine, on n'auroit plus à résoudre qu'une équation du premier degré : comparons donc ce trinome à $(x+n)^2$ ou . . . $x^2+2nx+n^2$; et comme n est arbitraire, posons $p=2n$, ou $n=\frac{1}{2}p$.

Donc si on a n^2 ou $\frac{1}{4}p^2=q$, x^2+px+q est le carré de $x+\frac{1}{2}p$; ce trinome n'est un carré que dans ce cas. En mettant $\frac{B}{A}$ et $\frac{C}{A}$ pour p et q, on trouve que *pour que* Ax^2+Bx+C *soit un carré, il faut qu'on ait entre les coefficiens la relation* $B^2-4AC=0$.

Par là, on voit que si $\frac{1}{4}p^2=q$, la proposée équivaut à $(x+\frac{1}{2}p)^2=0$; les deux racines sont égales à $-\frac{1}{2}p$. Mais si cette condition n'a pas lieu, alors en ajoutant $\frac{1}{4}p^2-q$ aux deux membres de l'équation (1), elle deviendra

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2 \text{ ou } (x+\frac{1}{2}p)^2=\frac{1}{4}p^2-q;$$

extrayant la racine, il vient $x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$,
d'où $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\ldots\ldots(2)$

Voyez (125) la raison du signe $\pm$. Dans chaque exemple particulier, on devra refaire le calcul ci-dessus, ou substituer, pour p et q leurs valeurs dans la formule (2).

139. Il convient d'analyser les divers cas que peut présenter le calcul. Faisons $\frac{1}{4}p^2-q=m$, d'où $q=\frac{1}{4}p^2-m$; par là, x^2+px+q revient à

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2-m \text{ ou } (x+\frac{1}{2}p)^2-m.$$

Telle est la quantité qu'on veut rendre nulle, par la substitution de certains nombres pour x.

1°. *Si* m *est négatif*, ce qui exige que q soit positif dans la proposée et $>\frac{1}{4}p^2$, comme il faudroit rendre nulle la somme $(x+\frac{1}{2}p)^2+m$ de deux quantités positives, il est visible que *le problème est absurde.* On a alors . . . . . $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{-m}$, le cas présent sera facile à reconnoître au symbole *imaginaire* $\sqrt{-m}$.

Cependant nous dirons encore que dans ce cas, l'équation proposée a deux racines, parce qu'*en assujétissant ces formules* $-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{-m}$, *aux mêmes calculs que si elles étoient réelles*, et les mettant pour x dans le trinome x^2+px+q, elles le rendroient nul. On comprendra aisément la raison de ce fait algébrique, en se rappelant ce qu'on a dit des racines négatives (108); car cette convention rendra la formule (2) propre à tous les cas, sans que ce genre de calcul présente d'ailleurs aucun inconvénient.

2°. *Si* m *est nul*, ce qui exige que q soit positif dans la proposée et $=\frac{1}{4}p^2$, alors x^2+px+q revient au carré de $x+\frac{1}{2}p$, et *les racines sont égales.* Ce cas sert de passage des racines réelles aux imaginaires.

3°. *Si* m *est positif*, alors q est négatif dans la proposée, où lorsqu'il est positif, on a $q<\frac{1}{4}p^2$; dans ce cas

$$(x+\tfrac{1}{2}p)^2-m=\{x+\tfrac{1}{2}p+\sqrt{m}\}\{x+\tfrac{1}{2}p-\sqrt{m}\}$$

Il est facile d'en conclure que $x^2+px+q=0$ a pour racines $-\frac{1}{2}p+\sqrt{m}$ et $-\frac{1}{2}p-\sqrt{m}$; et que leur somme est $-p$, et leur produit $\frac{1}{4}p^2-m$ ou q.

4°. Pour que les racines réelles soient de même signe, il faut que $\sqrt{m}$ soit $<\frac{1}{2}p$, ou $m=\frac{1}{4}p^2-q<\frac{1}{4}p^2$, ou enfin $q>0$. Ainsi quand q est négatif, les racines ont des signes contraires, et lorsque q est positif (et $<\frac{1}{4}p^2$) leur signe est le même et opposé à celui de p. *Voy.* le n°. 109, 2°, pour l'interprétation des racines négatives.

5°. Si $q=0$, sans recourir à la formule (2) on voit que $x^2+px=x(x+p)=0$ d'où $x=0$ et $x=-p$.

6°. Si $p=0$, on a $x^2+q=0$, d'où $x=\pm\sqrt{-q}$, valeur réelle ou imaginaire suivant le signe de q.

7°. On a $Ax^2+Bx+C=A\{(x+\frac{1}{2}p)^2+m\}$, m étant positif, nul ou négatif, suivant que les racines sont imaginaires, égales ou réelles. Dans les deux 1ers. cas, le multiplicateur de A étant positif, le produit ou Ax^2+Bx+C doit avoir le même signe que A, quelque valeur qu'on attribue à x; mais si m est négatif, soient a et b les racines réelles, on a

$$Ax^2+Bx+C=A(x-a)(x-b),$$

et on voit que si on donne à x des valeurs plus grandes ou moindres que a et b, le signe du résultat sera le même que celui de A, mais il sera différent si x est compris entre a et b.

8°. On pourra s'exercer sur les exemples suivans :

1er. *Cas.* $9x^2-12x+8=0$.... $x=\frac{2}{3}\pm\frac{2}{3}\sqrt{-1}$

2e. $9x^2-12x+4=0$.... $x=\frac{2}{3}$

3ᵉ et 4ᵉ. $\begin{cases} 9x^2-12x+3=0. & x=\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3} \text{ ou } x=1 \text{ et } x=\frac{1}{3} \\ 2x^2+3x+1=0. & x=-\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4} \text{ ou } x=-\frac{1}{2} \text{ et } x=-1 \\ x^2-x-2=0. & x=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2} \text{ ou } x=2 \text{ et } x=-1 \end{cases}$

5ᵉ..... $x^2-2x=0\ldots\ x=0$ et $x=2$.

6ᵉ..... $\begin{cases} x^2-9=0\ldots & x=3 \text{ et } x=-3 \\ x^2+9=0\ldots & x=\pm3\sqrt{-1} \end{cases}$

De même, l'équation $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$, résolue par rapport à y, donne

$$y=\frac{-Bx-D\pm\sqrt{\{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF\}}}{2A}.$$

140. Voici quelques problèmes du second degré.

I. Trouver un nombre x, tel qu'en ôtant 2 de son carré le reste soit 1. On a $x^2-2=1$, d'où $x=\pm\sqrt{3}$, ou $x=1,7320508\ldots$

II. Partager a en deux parties telles que m fois la 1ʳᵉ, multipliée par n fois la 2ᵉ, donne le produit p? On a $mx.n(a-x)=p$, d'où $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{p}{mn}\right)}$.

III. Etant donnés le produit p de deux poids et leur différence, trouver chacun d'eux? On a $xy=p$, $x-y=d$, d'où $x=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{(\frac{1}{4}d^2+p)}$ et $y=-\frac{1}{2}d\pm\sqrt{(\frac{1}{4}d^2+p)}$.

IV. Trouver deux nombres tels que leur somme a et celle b de leurs cubes soient données? De $x+y=a$, $x^3+y^3=b$, on tire $a^3-3a^2x+3ax^2=b$, et faisant $b=af$, on a

$$x=\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{3}f-\frac{1}{12}a^2)}$$

et

$$y=\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{3}f-\frac{1}{12}a^2)}.$$

V. Quel est le nombre dont n fois la puissance p est égale à m fois la puissance $p+2$? $x=\pm\sqrt{(n:m)}$.

VI. Plusieurs personnes sont tenues de payer les frais d'un procès, montant à 800 fr.; mais trois sont insolvables, et les autres, suppléant à leur défaut, sont contraintes de

donner chacun 60 fr. outre leur part; on demande le nombre x des payans. On a $\frac{800}{x+3}=\frac{800}{x}-60$, d'où $x^2+3x=40$ et $x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{9}{4}+40)}=-\frac{3}{2}\pm\frac{13}{2}$: ainsi, il y avoit 5 payans, au lieu de 8. Il est aisé d'interpréter la racine négative -8.

VII. On a deux points lumineux A et B, distans entre eux 2.
de $AB=a$; l'intensité de la lumière répandue par A est m fois celle de B; on demande le lieu C qui reçoit la même clarté de part et d'autre : sachant que la lumière transmise par un point lumineux à un corps opaque décroît comme le carré de leur distance augmente.

Soient α et β les intensités des lumières que communiquent les foyers A et B à la distance 1; $\frac{\alpha}{1}, \frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{9}\ldots$ seront celles que reçoit le point C lorsqu'il s'écarte de A à la distance 1, 2, 3,....; ainsi $\frac{\alpha}{x^2}$ est celle qui répond à l'espace $AC=x$; et comme $BC=a-x$, la lumière que B transmet à C est $\frac{\beta}{(a-x)^2}$: on a donc $\frac{\alpha}{x^2}=\frac{\beta}{(a-x)^2}$, d'où $\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{x}{a-x}\right)^2=m$, à cause de $\alpha=m\beta$: extrayant la racine on trouve enfin

$$x=\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}\pm 1} \quad \text{ou} \quad x=\frac{am}{m-1}\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

En général, on doit éviter la double irrationnalité des deux termes d'une fraction (65), et sur-tout celle du dénominateur. Ici, on a multiplié haut et bas par $\sqrt{m}\mp 1$, ce qui a donné (97, 3°.) pour dénominateur $m-1$ et pour numérateur $am\mp a\sqrt{m}$, ou $am\left(1\mp\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$. On en dira autant des cas semblables.

CHAPITRE IV.

DES RAPPORTS.

1. *Des Proportions.*

141. Les résultats donnés (70, 71 et 72) se traduisent ainsi en langage algébrique.

1°. Si on a l'équidifférence $a.b : c.d$, elle équivaut à $a-b=c-d$, d'où $a+d=c+b$. Si l'équidifférence est continue, on a $\div a . b . d$, d'où $2b=a+d$.

2°. Soit la proportion $a : b :: c : d$, ou $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, on a $ad=bc$, d'où $d=\frac{bc}{a}$. Si la proportion est continue $\div\div a : b : d$, on a $b=\sqrt{ad}$.

3°. L'équation $a^2-b^2=m-m^2$, équivaut à .... $(a+b)(a-b)=m(1-m)$, d'où on tire la proportion $\frac{a+b}{m}=\frac{1-m}{a-b}$. De même $1-x^2=a$, donne $\frac{1+x}{1}=\frac{a}{1-x}$.

4°. Ajoutons $\pm m$ aux deux membres de $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; il vient $\frac{a \pm mb}{b}=\frac{c \pm md}{d}$, d'où $\frac{a \pm mb}{c \pm md}=\frac{b}{d}$. Si $m=1$, $\frac{a \pm b}{c \pm d}=\frac{b}{d}$, (*V.* 73).

5°. Soient $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=$,... une suite de rapports égaux, de sorte que $\frac{a}{b}=q$, ou $a=bq$, $c=dq$, $e=fq$,...

En ajoutant toutes les équations on a (73, 3°.).

$$a+c+e\ldots=q\,(b+d+f+\ldots),$$

d'où
$$\frac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots}=q=\frac{a}{b};$$

6°. Si $a:b::c:d$, on a $a^m:b^m::c^m:d^m$, et $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}::\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}$.

2. *Des Progressions par différence.*

142. Soit la progression $\div\ a\,.\,b\,.\,c\ldots\ldots i\,.\,k\,.\,l$, d la raison, n le nombre des termes, on a les $(n-1)$ équations $b=a+d$, $c=b+d$,...... $l=k+d$: en ajoutant, il vient $l=a+d(n-1)$, comme on le sait (82).

La somme $a+l$ des extrêmes, est visiblement la même que $b+k$, puisque b surpasse a de la raison d, et qu'au contraire k est surpassé par l de la même quantité d. On a de même $b+k=c+i$; en général, *la somme des extrêmes est la même que celle de deux termes qui en sont également éloignés.* Cette somme est double du terme moyen lorsque le nombre des termes est impair (141, 1°.). D'après cela, si on ajoute 2 à 2 ces termes, $(a+l)$, $(b+k)$, $(c+i)$,..... il est clair qu'on aura $(a+l)$ pris autant de fois qu'il y a d'unités dans n ; ainsi la somme s de la progression $=\frac{1}{2}n\,(a+l)$.

143. Reprenons ces deux équations

$$l=a+d\,(n-1) \quad \text{et} \quad s=\tfrac{1}{2}n\,(a+l).$$

Nous pourrons en tirer deux quelconques des cinq quantités a, l, d, n et s, connoissant les trois autres. Voici divers problèmes relatifs à cette théorie.

I. Trouver n, connoissant a, d et s? L'élimination de l donne $s = an + \frac{1}{2}dn(n-1)$, d'où

$$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left\{\frac{2s}{d} + \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{d}\right)^2\right\}}$$

Par exemple, un corps qui descend du repos tombe de 4 mètres et $\frac{9}{10}$ dans la première seconde de sa chûte, du triple dans la seconde qui suit, du quintuple dans la suivante..... on demande combien il mettra de secondes à parcourir 400 mètres (*V.* ma Méc., n°. 157)? On a la progression $\div 4,9 \,.\, 3 \times 4,9 \,.\, 5 \times 4,9 \ldots\ldots$; puis $s = 400$; $a = 4,9$; $d = 9,8$; on trouve $n = \sqrt{\frac{2s}{d}} = \sqrt{\frac{800}{9,8}}$ d'où . . $n = 9''$ et $l = 83,3$ environ.

II. Combien une horloge frappe-t-elle de coups à chaque tour du cadran. Si elle ne sonne que les heures, on a $1 + 2 + 3 + \ldots + 12$; d'où $s = 6 \times 13 = 78$. Si elle sonne les demies, on a $2 + 3 + 4 \ldots + 13$ et $s = 90$, etc.

III. On a un amas de boulets de canon disposés en progression par différence, et composé de 18 rangs dont chacun contient 2 boulets de plus que le précédent; on demande combien il y en a dans le dernier rang et dans l'amas, sachant que le premier rang en contient 3. On a $a = 3$, $n = 18$, $d = 2$; et on trouve $l = 37$, $s = 360$.

IV. Insérer entre deux nombres donnés a et l, m moyens proportionnels par différence? Comme $m + 2 = n$, on a $l = a + d(m+1)$ d'où $d = \frac{l-a}{m+1}$, comme (83).

3. *Des Progressions par quotient.*

144. Soit la progression $\because a : b : c : d \ldots . i : l$, q étant la raison : on a les $n - 1$ équations

$$b = aq, \quad c = bq, \quad d = cq \ldots . \; l = iq;$$

or, en les multipliant et supprimant les facteurs communs, il vient $l = aq^{n-1}$, comme (84). Puisque toute progression géométrique peut prendre la forme

$$\div\!\div\, a : aq : aq^2 : aq^3 \ldots\ldots aq^{n-1}.$$

Les puissances entières et successives d'une même quantités sont en progression par quotient. Il en est de même de toute série de termes dont les exposans sont en progression par différence $aq^m : aq^{m+l} : aq^{m+2l} \ldots$

Ajoutons nos $n-1$ équations, il viendra

$b+c+d+\ldots+l=(a+b+c+\ldots+i)\,q$;

or $b+c+d+\ldots+l=s-a$, $a+b+c+\ldots+i=s-l$;

donc $s-a=(s-l)q$, et $s=\dfrac{lq-a}{q-1}$.

Les équations

$$l=aq^{n-1}, \quad s-a=(s-l)\,q,$$

servent à résoudre tous les problêmes, où, connoissant 3 des 5 quantités a, l, n, q et s on demande les deux autres. Il est vrai que l'élimination conduit souvent à des calculs impraticables maintenant; nous donnerons par la suite les moyens de les exécuter. C'est ainsi que a, n et s étant donnés, on ne peut obtenir q qu'en résolvant l'équation $aq^n - sq + s = a$, qui est du degré n.

De même, si on demande la valeur de n, qui est en exposant, on doit recourir aux logarithmes (*V.* 151, 3°.).

4. *Problêmes dépendans des proportions.*

145. *Règles d'intérêt.* Soit a le capital placé durant un nombre d'années designées par t; i l'intérêt de 100 francs : comme le capital a et le tems t sont en raison inverse (77), on change le problême en cet autre (80) : si 100 fr. rapportent i durant un certain tems, que

rapportera la somme at dans le même tems. Cette règle directe donne pour l'intérêt cherché x

$$x = \frac{ati}{100}.$$

Cette formule peut aussi servir à trouver l'une des quatre quantités x, a, t et i, connoissant les trois autres. On verra, par exemple, que 10000 fr. à $\frac{1}{3}p\,\frac{0}{0}$ par mois durant 7 mois rapportent 233,33 d'intérêt; et qu'il a fallu laisser 8000 fr. placés durant 7 mois $\frac{1}{2}$, pour que cette somme ait rapporté 150 fr. à $\frac{1}{4}$ $p\,\frac{0}{0}$ par mois.

Si, au lieu de l'intérêt de 100 fr., on donne le denier, c.-à-d., la somme r qui rapporte 1 fr. par an ou par mois, on aura

$$x = \frac{at}{r}.$$

Le rapport qui existe entre ces deux manières de stipuler l'intérêt est donné par $ri = 100$.

Si chaque année on laisse le capital s'accroître par les intérêts, voici ce qui arrive : si r francs rapportent 1 franc au bout de 1 an (ou 1 mois), le capital a se trouve augmenté de $\frac{a}{r}$, de sorte qu'au bout de 1 an (ou 1 mois) le capital est devenu . . . . $a' = a + \frac{a}{r} = a\left(\frac{1+r}{r}\right)$. Mais ce nouveau capital a' placé durant l'année (ou le mois) qui suit, doit de même devenir $a'\left(\frac{1+r}{r}\right)$ ou $a\left(\frac{1+r}{r}\right)^2$, de sorte qu'on a successivement $a\left(\frac{1+r}{r}\right)^3$, $a\left(\frac{1+r}{r}\right)^4$,... et en général

$$x = a\left(\frac{1+r}{r}\right)^t$$

pour la somme due au bout de t années (ou t mois). On peut encore employer cette équation à trouver l'un des quatre nombres a, r, t et x, connoissant les trois autres. En mettant $\frac{100}{i}$ pour r, la formule devient propre au cas où l'intérêt est stipulé à i pour 100, on a

$$x = a\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t.$$

Un homme destine une somme de 10000 francs à payer un bien de 12000 francs ; pour cela il place son capital à 5 pour % par an, et y joint chaque année les arrérages échus : on demande combien d'années sont nécessaires pour remplir le but qu'il s'est proposé ; on a $12000 = 10000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^t$, ou $6 = 5.\left(\frac{21}{20}\right)^t$. L'inconnue t est ici en exposant ; nous donnerons bientôt des moyens d'en trouver la valeur (151, 3°.). On aura $t = 3$ ans et 9 mois environ.

146. *Annuités.* On nomme Annuité la rente d'un capital a, calculée de sorte qu'en payant chaque année une somme x qui soit toujours la même, elle serve non-seulement à acquitter les intérêts échus, mais encore à diminuer le capital, de sorte qu'on se trouve libéré au bout d'un certain tems.

Le capital vaut $a\left(\frac{1+r}{r}\right)$ après la première année ; on paie x, ainsi on ne doit plus que $a' = a\left(\frac{1+r}{r}\right) - x$: mais a' se réduit pareillement, après le second paiement, à $a'\left(\frac{1+r}{r}\right) - x$, ou $a\left(\frac{1+r}{r}\right)^2 - x\left(\frac{1+r}{r}\right) - x$. On continue de même à multiplier par $\frac{1+r}{r}$ ce qui

reste au bout de chaque année et à retrancher x, pour avoir ce qui reste dû à la fin de l'année suivante ; de sorte qu'après t années l'emprunteur doit encore

$$z = a\left(\frac{1+r}{r}\right)^t - x\left(\frac{1+r}{r}\right)^{t-1} - x\left(\frac{1+r}{r}\right)^{t-2} \ldots - x.$$

Abstraction faite du premier terme, on a une progression par quotient dont la raison est $\frac{1+r}{r}$, dont les termes extrêmes sont x et $x\left(\frac{1+r}{r}\right)^{t-1}$; la somme (144) est donc $xr\left(\frac{1+r}{r}\right)^t - xr$. Ainsi l'emprunteur doit après t années,

$$z = (a - xr)\left(\frac{1+r}{r}\right)^t + xr.$$

on pourra tirer de là la valeur de l'une des quantités z, a, x, r et t connoissant les autres : si l'emprunteur s'est acquitté, $z = 0$. Pour l'usage de cette équation *voy.* n°. 153, 11ᵉ.

147. *Règles d'escompte.* Soit a le capital, i l'intérêt de 100 francs par mois, t le nombre de mois, $\frac{ati}{100}$ sera l'intérêt, de sorte que, pour l'escompte en dehors, la somme à payer sera $a - \frac{ati}{100}$, ou

$$x = a\left(1 - \frac{ti}{100}\right).$$

Pour *l'escompte en dedans* il faut dire, puisque $100 + ti$ doit être réduit à 100, à combien a doit-il être réduit ? D'où

$$x = \frac{100a}{100 + ti}.$$

148. *Règles de fausse position.* Soit $ax = b$ l'équation qui lie entre elles les parties d'une question ; si on suppose à x une valeur arbitraire s, et qu'on l'assujétisse à satisfaire aux conditions du problème, ce ne seroit que par hasard qu'on trouveroit $as = b$; supposons donc qu'on ait $as = c$, en divisant terme à terme par $ax = b$, on trouve $\frac{c}{b} = \frac{s}{x}$: ainsi *le résultat qu'on obtient est à celui qu'on doit obtenir comme le nombre supposé est à l'inconnue.*

Cherchons un nombre dont la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{4}$ et le $\frac{1}{5}$ réunis fassent 456. Supposons que 200 soit ce nombre, sa moitié, son quart et son cinquième forment 190 ; ainsi 200 n'est pas le nombre cherché : on posera la proportion $190 : 456 :: 200 : x$, d'où $x = 480$.

Combien faudroit-il de tems pour remplir un bassin à l'aide de quatre robinets, dont l'un le rempliroit en 2 heures, le 2e. en 3, le 3e. en 5, le 4e. en 6. Supposons qu'il fallût une heure ; le premier robinet empliroit la moitié du bassin, le 2e. le $\frac{1}{3}$, le 3e. le $\frac{1}{5}$, le 4e. le $\frac{1}{6}$; et comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6}{5}$, il ne faut pas une heure ; on dira $\frac{6}{5} : \frac{5}{5} :: 1 : x = \frac{5}{6}^{h} = 50'$.

Ce procédé, quoiqu'applicable aux règles de société, d'intérêt, etc., ne l'est pas à tous les problèmes du premier degré, puisque l'équation la plus générale est $ax + b = cx + d$. Si la supposition $x = s$, ne rend pas $as + b$ égal à $cs + d$, il en résultera une erreur e, de sorte que $as + b - (cs + d) = e$; retranchant de là $ax + b - (cx + d) = 0$, on a $(a - c)(s - x) = e$. Une autre supposition s' qui entraîneroit l'erreur e', donneroit $(a - c)(s' - x) = e'$: divisant ces résultats terme à terme, on a

$$\frac{s-x}{s'-x}=\frac{e}{e'} \text{ d'où } x=\frac{es'-e's}{e-e'}.$$

Ainsi *multipliez la première erreur par la seconde supposition et réciproquement; retranchez les résultats en ayant égard aux signes des erreurs; divisez ensuite par la différence des erreurs, le quotient sera l'inconnue.* C'est en cela que consiste la règle de double fausse position applicable à tous les problèmes du premier degré.

Dans notre dernier problème, la supposition de $x=1^h$. a donné $\frac{6}{5}$, et par conséquent l'erreur $+\frac{1}{5}$. En faisant $x=\frac{1}{2}^h$., on a $\frac{3}{5}$ pour résultat, et $-\frac{2}{5}$ d'erreur. J'écris ces nombres comme on le voit ci-contre, je multiplie en croix et je retranche;

Suppos.	Erreurs.
1	$+\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$

j'ai $\frac{1}{10}+\frac{2}{5}$ ou $\frac{1}{2}$; la différence des erreurs est $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ ou $\frac{3}{5}$; enfin je divise $\frac{1}{2}$ par $\frac{3}{5}$, et j'ai $x=\frac{5}{6}$.

5. *Des Logarithmes.*

149. Faisons varier x dans l'équation $y=a^x$ et observons les variations correspondantes de y.

1°. Si $a>1$, en faisant $x=0$, on a $y=1$; $x=1$ donne $y=a$; à mesure que x croîtra depuis zéro jusqu'à 1 et de là à l'infini, y croîtra de 1 vers a et ensuite à l'infini; de sorte que si on imagine que x passe par toutes les valeurs intermédiaires, en suivant la *loi de continuité*, y croîtra aussi de la même manière quoique beaucoup plus rapidement. Si on met pour x des valeurs négatives, on aura $y=a^{-x}$, ou (131) $y=\frac{1}{a^x}$. On voit de même que plus x croît et plus $\frac{1}{a^x}$ ou y décroît; de sorte qu'à mesure que x augmente négativement, y prend toutes les valeurs <1 jusqu'à zéro qui répond à $x=\infty$;

2°. Si $a < 1$, on fera $a = \frac{1}{b}$, b sera > 1 et on aura $y = \frac{1}{b^x}$ ou $y = b^x$ suivant qu'on prendra x positif ou négatif. On retombe donc sur le même cas, avec cette différence que x est positif lorsque $y < 1$, et négatif pour $y > 1$;

3°. Si $a = 1$, on a $y = 1$ quel que soit x.

On peut donc dire, pourvu que a soit autre que l'unité, qu'il y a toujours une valeur pour x qui rend a^x égal à un nombre donné quelconque y. L'usage perpétuel qu'on fait des belles propriétés de l'équation $y = a^x$, exige qu'on fixe des dénominations à ses parties, afin d'éviter les circonlocutions. On nomme x le *Logarithme du nombre* y; le nombre invariable a est *la Base*. Donc *le logarithme d'un nombre est la puissance à laquelle il faut élever la base pour produire ce nombre.*

Quant à la base a, elle est arbitraire, et lorsqu'on écrit $x = Log. y$, pour désigner que x est le logarithme du nombre y ou que $y = a^x$, la base a est sous-entendue, parce qu'une fois choisie, elle est supposée demeurer fixe. Mais si on la change, on doit indiquer la nouvelle base, c.-à-d., de quel *systême de logarithmes*, il s'agit. C'est ainsi que $10^3 = 1000$, $2^5 = 32$ indiquent que 3 est le logarithme de 1000, et 5 de 32; mais la base est 10 dans le premier cas et 2 dans le second.

150. On tire de là plusieurs conséquences.

1°. *Dans tout systême de logarithmes, celui de* 1 *est zéro et celui de la base* a *est un.*

2°. *Si la base* a *est* > 1 *les logarithmes des nombres* > 1 *sont positifs, les autres sont négatifs. Le contraire a lieu si* a < 1.

3°. La base étant fixée, chaque nombre n'a qu'un seul logarithme réel; il en a donc une infinité, puisque ce logarithme change avec la base. $9^2 = 81$, $3^4 = 81$, 2 et 4 sont donc les logarithmes du même nombre 81, suivant que la base est 9 ou 3.

4°. Les nombres négatifs n'ont point de logarithmes réels, puisqu'en parcourant la série de toutes les valeurs de x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on ne trouve pour y que des nombres positifs depuis o jusqu'à $+\infty$.

La composition d'une table de logarithmes consiste à déterminer toutes les valeurs de x qui répondent à $y = 1$, 2, 3.... dans l'équation $y = a^x$. Si on suppose $a^\alpha = m$, en faisant

$$x = 0 \quad \alpha \quad 2\alpha \quad 3\alpha \quad 4\alpha \quad 5\alpha \ldots$$

on trouve

$$y = 1 \quad m \quad m^2 \quad m^3 \quad m^4 \quad m^5 \ldots$$

les logarithmes croissent donc en progression par différence, tandis que les nombres croissent en progression par quotient; o et 1 sont les deux premiers termes : les raisons sont les nombres arbitraires α et m. On peut donc regarder les systèmes de valeurs de x et y qui satisfont à l'équation $y = a^x$, comme classés dans ces deux progressions, ce qui met d'accord les deux définitions que nous avons données des logarithmes (85 et 149).

151. Démontrons algébriquement les propriétés logarithmiques.

1°. Soient x et x' les logarithmes des nombres y et y' ou $x = Log.\ y$, $x' = Log.\ y'$: on a $a^x = y$, $a^{x'} = y'$; en multipliant et divisant ces deux équations l'une par l'autre on obtient

$$a^{x+x'} = yy',\ a^{x-x'} = \frac{y}{y'} :$$

Mais il suit de la définition des logarithmes, que les exposans $x+x'$ et $x-x'$ sont les logarithmes des nombres yy' et $\frac{y}{y'}$; donc

$$Log.\, y + Log.\, y' = Log.\, (yy'),$$

$$Log.\, y - Log.\, y' = Log.\, \left(\frac{y}{y'}\right);$$

2°. Si on élève à la puissance m l'équation $y=a^x$, et si on en extrait la racine m^e, on a $y^m=a^{mx}$, $\sqrt[m]{y}=a^{\frac{x}{m}}$: la définition donne $mx=Log.\, (y^m)$, $\frac{x}{m}=Log.\, \sqrt[m]{y}$; donc

$$Log.\, y^m = m\, Log.\, y, \quad Log.\, \sqrt[m]{y} = \frac{Log.\, y}{m};$$

ces résultats sont conformes à ce qu'on a vu (86, 87);

3°. Pour résoudre l'équation $c=a^x$, dans laquelle c et a sont donnés et x inconnu, on égale les logarithmes des deux membres et on en tire $Log.\, c = x\, Log.\, a$; une simple division donne donc $x=\frac{Log.\, c}{Log.\, a}$.

On trouve le nombre n des termes d'une progression par quotient à l'aide de cette proposition; car (144) l'équation $l=aq^{n-1}$ donne $\frac{l}{a}=q^{n-1}$, d'où

$$Log.\left(\frac{l}{a}\right)=(n-1)\, Log.\, q \text{ et } n=1+\frac{Log.\, l - Log.\, a}{Log.\, q}.$$

152. Il suit de ce qu'on vient de dire, que lorsqu'on aura une table de logarithmes calculée pour une base quelconque, il sera facile de *changer de système* et de calculer une autre table pour une nouvelle base a. En effet, soit x le logarithme cherché du nombre c, on a $c=a^x$; prenant les logarithmes dans le système connu,

il vient $x = \frac{Log.\ c}{Log.\ a}$: on voit que x, ou le logarithme d'un nombre c dans un système quelconque a, est le quotient du logarithme du même nombre dans le système connu, divisé par le logarithme de la nouvelle base pris dans ce même système. On obtiendra donc les logarithmes du nouveau système en les multipliant par le facteur $\frac{1}{Log.\ a}$, qui est le même pour tous les nombres, et qu'on nomme le *Module*.

Lorsqu'il arrivera que les motifs exposés (90) qui ont déterminé à préférer la base 10, perdront de leurs avantages, tandis qu'il en résultera de plus grands à choisir une autre base, nous le ferons avec d'autant plus de fondement qu'il est très-facile de changer de système de logarithmes.

153. On se sert aussi des logarithmes pour abréger les calculs algébriques : en voici des exemples qu'il faut se rendre familiers.

1°. $L\,(abcd\ldots.) = La + Lb + Lc + Ld + \ldots$

2°. $L\left(\frac{abc}{de^2}\right) = La + Lb + Lc - Ld - 2Le$;

3°. $L\,(a^m b^n c^p \ldots) = mLa + nLb + pLc\ldots$;

4°. $L\left(\frac{ax^n}{r^z}\right) = La + nLx - zLr$;

5°. $L(a^2 - x^2) = L(a+x)\,(a-x) = L(a+x) + L(a-x)$;

6°. $L\sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2}L\,(a+x) + \frac{1}{2}L\,(a-x)$;

7°. $L\,(z^3\sqrt[4]{z^3})\,Lz^3 + \frac{3}{4}Lz = \frac{15}{4}Lz =$;

8°. $L\sqrt[n]{(a^3 - x^3)^m} = \frac{m}{n}L(a-x) + \frac{m}{n}L\,(a^2 + ax + x^2)$;

9°. $L\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{(a+x)^2} = \frac{1}{2}L\,(a-x) - \frac{3}{2}L\,(a+x)$.

10°. Pour insérer m moyens par quotient entre a et l, il faut faire $n = m + 2$ dans les équations du n°. 144, et on a $l = aq^{m+1}$, d'où on tire la raison $q = \sqrt[n+1]{\left(\frac{l}{a}\right)}$ et $Lq = \frac{Ll - La}{m+1}$. Les divers termes aq, aq^2,.... ont pour logarithmes $La + Lq$, $La + 2Lq$;.... ainsi pour insérer 11 moyens entre 1 et 2, on trouve (à cause de $La = L1 = 0$), $Lq = \frac{1}{12} L2 = 0{,}0250858$, d'où . . $q = 1{,}059463$; les termes de la progression ont pour logarithmes $2Lq$, $3Lq$,.... et on a

$$\div 1 : 1{,}059463 : 1{,}122461 : 1{,}189207 : \ldots : 1{,}88774 : 2;$$

c'est la *génération harmonique* de Rameau.

11°. Pour obtenir t dans l'équation . . . . . . $(xr - a)\left(\frac{1+r}{r}\right)^t = xr$, on a $t = \frac{Lx + Lr - L(xr-a)}{L(1+r) - Lr}$. Ceci se rapporte aux annuités ainsi que la question suivante (*Voy.* 146).

12°. La même équation donne . . . . $L\left(\frac{xr-a}{x}\right) = Lr - tL\left(\frac{1+r}{r}\right)$; soit $k = \frac{xr-a}{x}$, on a $Lk = Lr - tL(1+r) + tLr$: on connoîtra donc le nombre k, et par suite $x = \frac{a}{r-k}$, ou bien $a = x(r-k)$, suivant que l'inconnue sera x ou a.

13°. Soit x l'inconnue de l'équation $b^{n-\frac{a}{x}} = c^{mx} . f^{x-p}$, on en tire $\left(n - \frac{a}{x}\right) Lb = mx\,Lc + (x-p)\,Lf$, d'où on conclut qu'il faut résoudre l'équation du second degré

$$(mLc + Lf)\,x^2 - (nLb + pLf)\,x + a\,Lb = 0.$$

De même $c^{mx} = ab^{nx-1}$, conduit à

$$x = \frac{La - Lb}{mLc - nLb}.$$

14°. Supposons que la population d'une province s'accroisse chaque année de $\frac{1}{30}$; on demande combien il y aura d'habitans au bout d'un siècle, sachant qu'il y en a aujourd'hui cent mille.

Soit $n = 100\,000$; au bout d'un an la population sera $n + \frac{1}{30}n$ ou $n(1 + \frac{1}{30}) = \frac{31}{30}n = n'$; au bout de l'année suivante elle sera de même $\frac{31}{30}n'$ ou $(\frac{31}{30})^2 n$;... au bout de cent ans elle sera donc $(\frac{31}{30})^{100} n$ ou $(\frac{31}{30})^{100} \times 100\,000 = x$; ce calcul est très-simple par logarithmes. On peut généraliser ce problème :

$$\begin{aligned} L\,31 &= 1,49136169 \\ L\,30 &= 1,47712125 \\ \hline L\left(\tfrac{31}{30}\right) &= 0,01424044 \\ \hline 100 \text{ fois ce log.} &= 1,424044 \\ L\,100000 &= 5,000000 \\ \hline &\ 6,424044 \\ \text{d'où } x &= 2\,654874 \end{aligned}$$

soient $\frac{1}{r}$ l'accroissement annuel de la population, n le nombre d'habitans primitifs, et x ce nombre après q années ; on trouvera de même $x = n\left(\frac{1+r}{r}\right)^q$; d'où on tire

$$Lx = Ln + qL\left(\frac{1+r}{r}\right);$$

$$Ln = Lx - qL\left(\frac{1+r}{r}\right);$$

$$q = \frac{Lx - Ln}{L\left(\frac{1+r}{r}\right)};$$

$$\frac{Lx - Ln}{q} = L\left(1 + \frac{1}{r}\right);$$

équations dont on fait usage suivant que l'inconnue est x, n, q ou r.

LIVRE TROISIÈME.

ELÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

LA GÉOMÉTRIE est la science qui apprend à mesurer l'étendue. Tout corps a trois dimensions *Longueur*, *Largeur* et *Epaisseur* ou *Profondeur* : les limites qui le terminent en sont la *Surface*. Mais les surfaces d'un corps, en se rencontrant 2 à 2, sont elles-mêmes terminées par des *Lignes* ; les limites qui bornent les lignes sont des *Points*. Ce sont ces diverses limites des corps qui nous servent à reconnoître leur *Figure*.

Quoiqu'il n'y ait pas de corps sans trois dimensions, on fait souvent abstraction de l'une d'elles ou de deux. C'est ainsi que lorsqu'on parle de la grandeur d'un étang ou de la hauteur d'un édifice, on n'a égard qu'à une surface et à une ligne. Afin de procéder du simple au composé, par une gradation qui facilite l'étude, nous diviserons la géométrie en trois parties : la première traitera des *Lignes*, la seconde des *Surfaces*, la troisième des *Volumes*.

CHAPITRE PREMIER.

DES LIGNES.

1. *Mesure des Lignes et des Angles.*

Fig. 1, 3 et 5. 154. Il suit de la nature des lignes, qu'on peut les regarder comme la trace d'un point A qui se meut vers un autre point B : cette trace AB s'appelle *Droite* lorsqu'elle est *le plus court chemin* de A à B; sinon la ligne est, ou *Courbe* telle que ACB (Fig. 3.), ou formée de lignes droites brisées AC CD DB (Fig. 5). On en conclut que

1. 1°. La vraie mesure de la distance entre deux points A et B, doit être prise sur la droite AB.

2°. On ne peut mener qu'une seule droite d'un point à un autre, et toute droite AB qui a deux de ses points A et B communs avec une autre CC' doit coïncider avec elle dans l'étendue AB.

1. 3°. On doit par la pensée concevoir toute droite AB comme prolongée de part et d'autre à l'infini vers C et C' : le prolongement devra être tel, que si on joint l'un de ses points C à un autre C', par une droite CC', elle couvre AB.

4°. Deux droites ne peuvent se couper qu'en un seul point, puisque si elles avoient deux points communs, elles coïncideroient.

On dit qu'une surface est Plane, lorsqu'en joignant deux quelconques de ses points par une droite, elle s'y confond dans toute son étendue.

155. Lorsqu'on veut ajouter deux longueurs AB et BC, on porte l'une CB sur le prolongement de l'autre, et on dit alors que $AC = AB + BC$. De même, pour soustraire CB de AC, on trouve $AB = AC - CB$. Il sera aisé d'ajouter ou de soustraire un plus grand nombre de lignes; de répéter b fois une longueur A, ou d'en prendre la 2ᵉ., 3ᵉ.,.... partie.

156. *Mesurer* une droite, c'est chercher combien de fois sa longueur A, en contient une autre B connue et prise pour *Unité* : et le nombre de fois qu'on trouve, ou le rapport $\frac{A}{B}$ est la mesure cherchée.

Il arrive souvent que l'unité B n'est pas contenue un nombre exact de fois dans A; voici comment on doit s'y prendre alors pour évaluer le rapport $\frac{A}{B}$. On *divisera* A par B, c.-à-d., qu'on cherchera le nombre de fois que A contient B, et le reste R. On divisera de même B par R, puis R par le nouveau reste R', etc.... ce qui revient à chercher la *commune mesure* m entre A et B : alors $\frac{A}{B}$ sera égal au rapport $\frac{a}{b}$ entre les nombres de fois a et b que m est contenu dans les lignes A et B.

Mais s'il y a toujours un reste à chaque division, l'opération n'a plus de bornes, et le rapport $\frac{A}{B}$ ne pouvant être évalué exactement en nombres, est *incommensurable*. On se contente alors d'une approximation, ce qu'on fait en négligeant celui des restes successifs qu'on juge suffisamment petit.

157. Nous savons donc évaluer une ligne égale à

$$A + B - C - D \ldots, \; nA + mB, \; \frac{A}{m}, \; \frac{A}{B}.$$

n, m étant des nombres et $AB\,C\,D$ des lignes données. En général, on peut toujours représenter des lignes par des nombres abstraits, en composer des formules et les assujétir aux règles ordinaires du calcul. Ainsi par la ligne A, nous entendrons le nombre de fois a que cette ligne contient la longueur B prise pour unité, ou le rapport $\frac{A}{B}$ entre elles. Réciproquement on peut représenter les nombres par des lignes.

4. 158. On a $AB < AC + CB$; prenons dans le plan ABC un point intérieur D; et menons DB et AD prolongé en E; comme $AE < AC + CE$, en ajoutant EB de part et d'autre, on a $AE + EB < AC + CB$. Cette même proposition appliquée au point D de la figure AEB donne $AD + DB < AE + EB$: donc à plus forte raison, $AD + DB < AC + CB$.

5. 159. On dit qu'un contour $ACDB$ est *Convexe*, lorsque toute droite IK ne peut le couper qu'en deux points I et K. De deux chemins convexes $ACDB$ $AEFGB$, qui mènent de A à B, celui qui enveloppe l'autre est le plus long, ou $ACDB > AEFGB$. Car, en prolongeant EF, on a $ACDB > AIKB$; et il sera aisé de prouver de même, en prenant chaque partie, que $AIKB > AEFGB$.

3. 160. La même chose a lieu pour des courbes convexes, et on a $ACB < AMB$: car menons une droite EF qui *touche* ACB en un point quelconque C, on aura . . . $EF < EMF$; ajoutant de part et d'autre $AE + BF$, il vient $AEFB < AMB$. Deux autres tangentes ik lm donneront $AiklmB < AEFB$: et ainsi de suite. On aura par là une série de lignes brisées, dont la longueur diminuera à mesure que leur système s'approchera de ACB et qui sera $> ACB$: à plus forte raison on aura $ACB < AMB$.



161. Dans les élémens, outre la ligne droite, on considère encore la *Ligne circulaire*; c'est celle dont tous les points $ABDE$ sont dans un plan et à égale distance d'un point C qu'on nomme *Centre*. La surface renfermée dans la *Circonférence* $ABDE$ se nomme *Cercle*; les droites CA, CB;.... qui partent du centre et vont jusqu'à la courbe sont des *Rayons*: le *Diamètre* AD est une droite qui coupe la circonférence en passant par le centre; c'est un double rayon. 6.

Une partie AFB de la circonférence est un *Arc*, la droite AB est *la Corde qui le sous-tend*. La surface $AFBC$ comprise entre deux rayons et l'arc est un *Secteur*: enfin celle qui est renfermée entre l'arc AFB et sa corde AB est un *Segment*.

162. De là on conclut que, 1°. *un diamètre* DA *est la plus grande corde*; car $BC + CA$ ou $DA > BA$. 6.

2°. *Le diamètre coupe le cercle en deux parties égales*; car, en pliant la figure suivant DA les demi-cercles coïncident.

3°. Deux cercles ou deux arcs de rayons égaux coïncident en appliquant leurs centres l'un sur l'autre; et si les longueurs de ces arcs sont égales, ils coïncident dans toute leur étendue.

4°. *Les arcs égaux ont donc des cordes égales.*

Soit l'arc $DBF < DBA$ et $> DB$; on a $CF < CI + IF$, d'où $CF - CI$ ou $IB < IF$; mais $BD < DI + IB$ ou $< DI + IF$: ainsi la corde croît avec l'arc. Donc *les cordes égales sous-tendent des arcs égaux.* 6.

163. Mesurer un arc AFB, c'est chercher son rapport à un autre arc connu BD de même rayon; si ces arcs étoient *Rectifiés*, c.-à-d., étendus en ligne droite, on porteroit l'une sur l'autre comme il a été dit (156): mais la rectification n'est nullement nécessaire pour trouver 6.

6. ce rapport. On prend une ouverture de compas égale à la corde *BD* du plus petit arc, et on la porte sur l'autre autant de fois qu'on peut, ce qui donne le nombre de fois que l'un contient l'autre. S'il y a un reste on continue comme pour les lignes droites.

On peut aisément ajouter et soustraire des arcs de même rayon, trouver leur rapport, multiplier l'un d'eux par un nombre donné.

7. 164. Lorsque deux droites *AC BC* indéfinies se coupent
en *C* la quantité dont elles sont écartées l'une de l'autre, est ce qu'on appelle un *Angle*; *C* en est le *Sommet*. On désigne un angle par la lettre placée au sommet ; à moins qu'elle ne soit commune à plusieurs angles (comme fig. 10), car alors il faut énoncer les lettres des deux côtés de l'angle en ayant soin de mettre celle du sommet entre les deux
7. autres. L'angle *C* se désignera donc aussi par *BCA* ou *ACB*.

165. Deux angles *ACB A'C'B'* sont égaux quand il peuvent coïncider en les posant l'un sur l'autre. Ainsi, appliquons le côté *C'B'* sur *CB*, *C'* en *C*, si les angles *C'* et *C* sont égaux, le côté *A'C'* se couchera sur *AC*. Décrivons des sommets comme centres, avec un rayon quelconque, les arcs *AB A'B'*, il est clair que ces arcs sont égaux ou inégaux avec les angles. Du reste, puisque les côtés doivent toujours être regardés comme indéfiniment prolongés, on voit que *la grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés.*

9. En faisant coïncider les sommets *C* de deux angles et l'un de leurs côtés, on les ajoutera ou soustraira suivant que les surfaces seront ou non séparées par ce côté : ainsi, $BCA = DCA - BCD$ et $DCA = BCA + BCD$: les arcs *ad bd ab* sont en même tems ajoutés ou retranchés. Il est donc bien facile de faire la soustraction et l'addition des angles ; de même pour les multiplier ou diviser par

un nombre donné, il ne s'agit que de faire cette opération sur les arcs (163).

166. Pour construire un angle égal à un angle donné C, on tirera une ligne indéfinie $C'B'$; puis d'un rayon quelconque et des centres C et C', on décrira les arcs AB $A'B'$; enfin portant l'ouverture de compas AB de B' en A', on mènera $A'C'$. Les angles C et C' seront visiblement égaux, puisque les arcs AB $A'B'$ le seront. 7.

167. a et b étant des quantités *Constantes*, α et β des grandeurs *variables* qu'on est maître de rendre aussi petites qu'on veut; si l'équation $a+\alpha=b+\beta$ a lieu quels que soient α et β, elle doit se partager en deux autres, l'une $a=b$ entre les constantes, l'autre $\alpha=\beta$, entre les variables, et qui doit subsister pour tous leurs états de grandeur. En effet, si on suppose $a=b\pm k$, on aura ...... $a-b=\beta-\alpha=\pm k$, équation absurde, puisque les quantités α et β ne seroient pas susceptibles de décroître indéfiniment, leur différence devant toujours être $=k$.

C'est ce principe qui constitue *la méthode des limites*, dont nous ferons un fréquent usage par la suite. En général, on dit qu'une grandeur est LIMITE d'une autre, quand *on peut faire approcher celle-ci de la première, de manière à rendre leur différence plus petite que toute grandeur donnée, sans cependant qu'elles puissent jamais devenir rigoureusement égales.*

168. *Le rapport de deux angles* BCA DON *est le même que celui des arcs* ba dn *compris entre leurs côtés, et décrits de leurs sommets comme centre, avec le même rayon.* 8.

1°. Si les arcs ba dn sont commensurables, leur commune mesure dx sera contenue m fois dans ba, p fois dans dn, de sorte que $\frac{ba}{dn}=\frac{m}{p}$. Par chaque point de division

8. xy... menons des lignes Ox Oy... aux sommets les angles proposés seront de même coupés en m et p angles égaux xOd yOx... donc on a $\frac{BCA}{DON}=\frac{m}{p}$. Ces deux relations donnent (*).

$$\frac{BCA}{DON}=\frac{ba}{dn}\ldots\ldots(A).$$

2°. Si les arcs sont incommensurables, divisons l'un d'eux nd en un nombre quelconque p de parties égales dx xy.... et portons-les sur l'autre arc ba : soit i le point de division le plus voisin de a ; menons CI. Cela posé les arcs dn bi étant commensurables, on a $\frac{ICB}{NOD}=\frac{bi}{dn}$: l'angle $ICB=BCA+ICA$, l'arc $ib=ba+ia$; donc

$$\frac{BCA}{DON}+\frac{ICA}{DON}=\frac{ba}{dn}+\frac{ia}{dn}.$$

Or, ICA et ia varient avec le nombre p des divisions de l'arc nd et peuvent être rendus aussi petits qu'on voudra, tandis que les autres quantités restent les mêmes. On a donc (167), $\frac{BCA}{DON}=\frac{ba}{dn}$.

9. 169. Pour trouver le rapport de deux angles, il n'est plus nécessaire de faire sur eux l'opération analogue à celle qui a été indiquée sur les lignes (156), et qui seroit ici fort embarrassante. On substitue au rapport cherché celui des arcs, qui est le même. Concluons de là que 1°. le

(*) On ne doit pas oublier que l'égalité de deux rapports constitue une proportion (71). En géométrie l'usage a prévalu de lire ainsi ces sortes d'expressions, BCA *est à* DON *comme* ba *est à* dn, et de préférer cette locution à celle équivalente, BCA *divisé par* DON *est égal à* ba *divisé par* dn. On doit en dire autant dans toute la géométrie élémentaire.

rapport des surfaces des secteurs est le même que celui 9.
des arcs.

2°. La *Bisection*, *Trisection*, ... *Multisection* d'un angle BCA, c.-à-d., sa division en 2, 3,..... plusieurs parties égales, est réduite à celle de l'arc ba. Nous verrons bientôt ce qu'on sait sur cette matière (236 à 238).

3°. Si on prend pour unité d'arc nd, celui qui est com- 8.
pris entre les côtés de l'unité d'angle DON, nd et DON étant chacun l'unité de leur espèce, notre proportion (A) donne $BCA = ba$. Ainsi *tout angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre* (*).

4°. Si du sommet C des angles DCA BCA, on dé- 9.
crit deux arcs abd $a'b'd'$, le rapport $\frac{BCA}{DCA}$ sera $= \frac{ab}{ad}$ ou $= \frac{a'b'}{a'd'}$ suivant qu'on prendra l'un ou l'autre de ces arcs. La grandeur du rayon Cb ou Cb' est, comme on voit, indifférente dans la mesure des angles; et comme

(*) Ceci suppose une condition tacite, car l'angle BCA ne peut être égal à l'arc ba; mais dans l'équation $BCA = ba$, ce n'est plus un angle et un arc qui y entrent, ce sont deux nombres abstraits qui indiquent combien de fois l'angle et l'arc contiennent l'unité de leur espèce DON et dn : de sorte que $BCA = ba$ signifie en effet la même chose que $\frac{BCA}{DON} = \frac{ba}{dn}$. C'est ce qui a également lieu dans toute formule; les lettres qui y entrent ne sont que des nombres abstraits qui représentent les rapports des choses mesurées à leur unité.

C'est aussi improprement qu'on dit qu'un arc est la mesure d'un angle, puisqu'on ne peut établir de rapports entre deux choses hétérogènes : on doit entendre par là que les angles croissans dans le même rapport que les arcs, le nombre qui exprime la mesure de l'angle, exprime aussi celle de l'arc.

9. $\frac{ab}{a'b'} = \frac{ad}{a'd'}$, les arcs *ab* et *a'b'* sont entre eux comme les circonférences entières. On appelle ces arcs *Semblables*.

170. Maintenant que nous savons mesurer les droites, les arcs, les angles, et que nous concevons nettement leur introduction dans les calculs, cherchons à les combiner, afin de voir la manière dont on les emploie à la formation des figures, et les conditions qui les lient entre eux.

2°. *Des Perpendiculaires et des Obliques.*

10. 171. Si l'angle $ACB = ACD$, *BD* étant une droite, en pliant la figure suivant *AC*, *CB* se couchera sur son prolongement *CD* : on dit alors que *AL* est *Perpendiculaire* sur *DB*, ou que l'angle *ACD* est *Droit*. L'arc *AB* compris est le quart de la circonférence ou le *Quadrans*; l'angle $FCB <$ l'angle droit *ACB* est *Aigu*; l'angle $FCD > ACD$ est *Obtus*.

Les quatre angles *ACB ACD LCB LCD* sont donc égaux, et *BD* est aussi perpendiculaire sur *AL*, car ces lignes coupent le cercle en 4 parts égales. Il est souvent commode de prendre l'angle droit et le quadrans pour unités d'angle et d'arc.

10. 172. Lorsqu'une ligne *FC* tombe sur une autre *BD*, les angles *FCB DCF Adjacens*, ont pour somme deux droits : la perpendiculaire *AC* sur *BD* rend cela évident. Réciproquement si $FCB + FCD = 2$ droits, en appliquant l'un contre l'autre ces angles et faisant coïncider le sommet *C* et un côté *FC*, *DC* sera le prolongement de *CB*; car menant *AC*, perpendiculaire sur *CB*, elle devra l'être aussi sur *DC*. On appelle *Supplémens* deux angles dont la somme vaut deux droits; ils sont *Complémens* lorsqu'elle ne vaut qu'un droit. *FCB* a pour supplément *FCD*, et pour complément *FCA*.

173. Il suit de là que les angles $BCF+ECF+DCE=2$ dr. 10.
lorsqu'ils sont formés d'un même côté d'une ligne BD; et que tant de lignes qu'on voudra KC BC EC IC.... qui concourent en un point C, forment des angles dont la somme est 4 droits. Ceux-là interceptent la demi-circonférence, ceux-ci la circonférence entière.

174. Lorsque deux droites DB AL se coupent en C, 11.
les angles opposés au sommet sont égaux; car. . . . . . $ACD+ACB=2$ droits$=BCE+ACB$, d'où $ACD=BCE$. On a de même $ACB=DCE$.

175. Soit AC perpendiculaire sur DE, toute autre 12.
droite AB ne peut l'être; car si l'angle ABC étoit droit, en prenant $CH=AC$ et menant BH, CBH seroit aussi droit, puisqu'en pliant la figure suivant DB, H tomberoit en A, et par conséquent CBH sur CBA. Donc ABH seroit une ligne droite (172), ainsi que AH; ce qui est absurde. Ainsi *par un point* A *on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une droite :* si ce point étoit sur la droite en C la chose seroit évidente.

1°. Puisque $AH < AB + BH$ ou $2AB$, on a $AC < AB$.

2°. Si $CD = CB$, en pliant la figure suivant AC, D tombe en B, donc $AD=AB$. La même chose arrive lorsque l'angle $CAD = CAB$.

3°. Si $CE > CB$, ou si l'angle $CAE > CAB$, en menant EH, on a $AB+BH < AE+EH$: or AB et BH sont des obliques égales ainsi que AE et EH. Donc $2AB < 2AE$, ou $AB < AE$.

176. Donc *les obliques qui s'écartent le plus de la perpendiculaire sont les plus longues, celles qui s'en écartent autant sont égales, et la perpendiculaire est plus courte que toute oblique;* elle mesure la distance d'un point à une ligne.

177. Réciproquement la ligne AC est perpendiculaire sur

12. *DE* lorsqu'elle est plus courte que toute autre ; puisque si *AB* était perpendiculaire, il faudroit qu'on eût $AB < AC$. De même, si $AB = AD$, il faut que $DC = BC$, puisque sans cela *AB* seroit > ou < *AD*, suivant que *BC* seroit > ou < *DC*. Enfin si $AE > AB$, on verra de même que *CE* est > *CB*.

178. Concluons de là que, 1°. on ne peut mener trois obliques égales d'un point à une droite.

13. 2°. Si *AH* est perpendiculaire au milieu *C* de *DB*, chaque point *F* de *AH* est autant éloigné de *B* que de *D*.

3°. Les points de la perpendiculaire *AH* jouissent seuls de cette propriété ; car prenons un point *G* hors de *AH*, il sera plus près de *B* que de *D*, parce que $GB < GF + FB$ ou $< GF + FD$, ou enfin $GB < GD$.

13 et 14. 179. Comme il suffit qu'une droite *AH* ait deux de ses points à égale distance de deux autres *D* et *B*, pour en conclure qu'elle est perpendiculaire sur *DB*, il est aisé de *mener une perpendiculaire à une droite donnée* DB *par un point connu* A, pris hors de la droite (Fig. 13) ou sur la droite, (Fig. 14). Du centre *A*, on décrira avec un rayon quelconque des arcs, qui couperont la ligne donnée en *D* et *B* ; puis de ces points comme centres et avec un rayon arbitraire, on tracera de nouveau deux arcs qui se couperont en *H* ; *AH* sera la perpendiculaire demandée.

Il faut observer de prendre des rayons assez grands pour que les intersections dont on vient de parler aient lieu (175 et 192).

15. 180. On peut aussi mener une perpendiculaire *AH*, au milieu d'une droite donnée *DB*. Des centres *D* et *B*, on décrira des arcs qui se couperont en *A* et en *H*, les rayons étant d'ailleurs arbitraires, mais égaux pour chaque intersection et d'une longueur convenable (192) ;

AH sera la ligne demandée. Cette construction donne en outre *le milieu* C *de la droite* DB. 15

3°. *Des Parallèles.*

181. On nomme *Parallèles* deux droites situées sur un même plan, et qui, dans leur cours indéfini, ne se rencontrent ni d'un côté, ni de l'autre.

1°. *Deux droites* AC BD *perpendiculaires à une même ligne* KL *sont parallèles*, puisque si elles se rencontroient, on auroit d'un point deux perpendiculaires abaissées sur la ligne KL, (175). 17

2°. Deux lignes CA DB coupées par une *Sécante* HG sont parallèles, lorsque les angles AEF EFD sont égaux; car du milieu I de EF abaissons KL perpendiculaire sur BD, et RIR' sur KL; puis prenons $LS = FL$, et menons IS. On a (175, 2°.), $IS = IF = IE$, et l'angle $LIS = FIL = KIE$ opposé au sommet. Plions maintenant la figure suivant RR', les lignes IL IS se coucheront sur IK et IE; de plus S tombera en E; mais, par supposition, l'angle $E = F = S$; ainsi SL se couchera sur EK, et par conséquent L tombera en K, donc les angles L et K sont droits; et les lignes CA DB sont parallèles (1°.). 17

Les lignes CA DB sont encore parallèles; 3°. lorsque les angles GEC et BFH sont égaux; 4°. lorsque l'angle $HFB = FEA$; 5°. quand les angles EFB FEA sont supplémens; 6°. quand les angles GEA HFB sont supplémens. Ces propositions se démontrent en prouvant qu'il résulte des hypothèses que les angles AEF EFD sont égaux (2°.).

On a nommé *Alternes* deux angles situés de part et d'autre de la sécante, *Internes* ou *Externes* ceux qui sont au-dedans, ou en dehors. Ainsi, les angles AEF,

17. *EFD* sont alternes internes ; *GEC BFH*, alternes externes ; on nomme encore les angles *HFB FEA* *Correspondans*. Nous dirons donc que *deux droites sont parallèles, lorsque, coupées par une sécante, elles forment les angles alternes internes, ou alternes externes, ou correspondans, égaux; ou quand les angles internes ou externes d'un même côté valent ensemble deux droits.*

182. Les réciproques de ces propositions sont vraies :
16. 1°. *Lorsque deux droites* CA DB *sont parallèles, toute perpendiculaire* KL *sur l'une, l'est aussi sur l'autre.* Il n'est guère d'efforts que les géomètres n'aient tentés pour parvenir à démontrer ce principe ; mais aucun n'a été heureux : ils ont seulement dissimulé la difficulté, sans la lever (*). On conçoit bien que si la droite *KI* tourne autour de *K*, le point *E* d'intersection avec *BD*

(*) « La démonstration de cette proposition fort simple laisse peut-« être quelque chose à desirer du côté de la rigueur ; mais le seul énoncé « produit la conviction la plus entière ; il ne faut donc pas, dans « l'enseignement, insister sur ce qui peut manquer à la rigueur des « preuves que l'on en donne ; et l'on doit abandonner cette discus-« sion aux métaphysiciens géomètres, du moins jusqu'à ce qu'elle « ait été suffisamment éclaircie, pour ne laisser aucun nuage dans « l'esprit des commençans. » (Laplace, Écoles normales, t. IV, p. 43).

18. Au reste voici ce qu'on a donné de plus lumineux sur cette matière. Un angle quelconque *BCA* est contenu dans l'angle droit *BCD* autant de fois que l'arc *ba* l'est dans l'arc *bd* ; soit *n* ce rapport $\frac{bd}{ba} = n = \frac{BCD}{BCA}$. Soient prises *n* parties égales *EC EG*.... et menées les perpendiculaires *EF*, *GH*... sur *CD*; on formera ainsi *n* bandes *BCEF FEGH*.... (on aura soin d'en former plus de *n*, si *n* n'est pas un nombre entier) ; or, en pliant la figure suivant *EF GH*. .. on voit aisément que ces bandes sont égales ; et comme la surface *BCMN* de leur somme est moindre que l'angle droit $BCD = n \times BCA$, *BCA* sera plus grand que la *n*e. partie

s'éloignera en F, D..., mais on n'en reste pas moins dans le doute de savoir s'il n'arrivera pas une position où KH cessera de rencontrer BD, avant d'atteindre la situation de AC perpendiculaire sur KL. 16.

Nous regarderons donc comme évident que toute droite autre que KC, rencontre BD à droite ou à gauche de KL, suivant qu'elle est située en KH au-dessus, ou en KH' au-dessous de AC; et cela quelque petit que soit l'angle HKC ou $H'KC$; ce qui revient à dire que *par un point* K, *on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite* BD.

2°. Soient les parallèles CA DB et la sécante quelconque HG : du milieu I de EF, abaissons LK perpendiculaire sur BD; (elle le sera aussi sur AC, 1°.) : puis RIR' sur KL : prenons $LS = LF$, et menons IS. En pliant la figure suivant RR', on verra, comme ci-devant, que S tombe sur E; et comme du point E, on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur KL (175), SL se couchera sur EK; donc l'angle S ou F est égal à KEI, et la sécante forme avec les parallèles des angles alternes internes égaux. 17.

3°. Les angles alternes externes GEC BFH sont aussi égaux comme opposés aux précédens; 4°. les angles correspondans BFH AEF sont égaux, puisque. . . . . . $BFH = EFD = AEF$; 5°. les angles FEA EFB internes d'un même côté sont supplémens l'un de l'autre, ainsi que les angles GEA HFB externes d'un même côté. Cela se voit aisément. Donc

---

de $BCMN$, d'où $BCA > BCEF$, ce qui ne peut arriver qu'autant que CA rencontre EF. On doit entendre dans ceci par le mot *angle* l'espace indéfini compris entre les côtés.

*

17. *Lorsque deux parallèles sont coupées par une sécante, les angles sont égaux, lorsqu'ils sont de même nature ; et supplémens, lorsqu'ils sont de nature différente*, (l'un aigu, l'autre obtus).

21. 183. Il suit de là que 1°. *pour mener par un point donné* C *une parallèle* CD *à une droite* AB, on pourra employer l'une quelconque des six propriétés qui caractérisent ces lignes. Par exemple, d'un rayon quelconque CB et du centre C, on décrira un arc BI; puis du centre B l'arc CK : enfin, on prendra l'arc $BI = CK$, et CI sera parallèle à AB. Car, menant la sécante BC, les angles ABC BCI seront égaux (166).

19. 2°. *Deux droites* AC BD *paralèlles à une troisième* EF *sont parallèles entre elles*; car la perpendiculaire KI à EF l'est aussi à AC et BD; celles-ci ne se rencontrent donc pas.

20. 3°. *Deux angles* CAB DEF *dont les côtés sont parallèles, et l'ouverture tournée du même côté, sont égaux* : car prolongeant EF en G, les parallèles AC ED donnent l'angle $DEF = CGF$: à cause des parallèles AB GF, on a l'angle $CGF = CAB$; donc $CAB = DEF$.

21. 4°. *Deux parallèles* AB CD *sont partout équidistantes;* car de deux points quelconques A et B, et du milieu E de AB, menons les perpendiculaires AC BD EF sur AB, elles le seront aussi sur CD; or, pliant la figure suivant EF, A et C tomberont en B et D ; d'où $AC = BD$. (*Voy.* 200).

4. *Des Perpendiculaires et Parallèles considérées dans le cercle, et des Tangentes.*

22. 184. Soit le rayon CD perpendiculaire à la corde AB,

en pliant la figure suivant *CD*, le point *A* tombera en *B*, puisque les obliques *CA CB* sont égales (177); ainsi *E* est le milieu de *AB*. De même *AD* se couche sur *DB*, et *D* est le milieu de l'arc *ADB* : ainsi *tout rayon perpendiculaire à une corde la coupe en deux parties égales, ainsi que l'arc sous-tendu.* 22.

185. Le centre *C*, le milieu *E* de la corde et celui *D* de l'arc, étant en ligne droite, il s'ensuit que toute ligne *CD* qui passe par deux de ces points, passe aussi par le troisième, et est perpendiculaire à la corde *AB*. De plus, puisque par un point *C*, *E* ou *D*, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à *AB*, dès qu'une droite, passant par l'un de ces points, sera perpendiculaire à *AB*, on en concluera qu'elle passe par les deux autres. Donc, *de ces quatre conditions, être perpendiculaire à une corde, passer par son milieu, par le milieu de l'arc et par le centre, deux étant posées, les deux autres suivent nécessairement.*

On peut, au reste, démontrer directement chacun des six cas compris dans ce théorème, en le traitant comme celui qui nous a servi de base.

186. *Pour diviser un arc* ADB, *ou un angle* ACB *en deux parties égales*, il suffit d'abaisser la perpendiculaire *CD* sur la corde *AB*, (179). Comme par le même moyen on peut de nouveau partager chaque moitié, etc.; on sait diviser un arc ou un angle en 2, 4, 8... 2^n parties égales. (*Voy.* n°. 201, 4°.).

187. Il est facile de *faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés* A, B et *D*; car menons *AB* et *BD*, puis les perpendiculaires *HE FI* sur leurs milieux *E* et *F*. Chacun des points de *HE* est autant éloigné de *A* que de *B*; ces points jouissent seuls de cette propriété; de même pour *FI* relativement à *B* et *D*. 23.

23. Donc le point C où se coupent HE et FI, est à la même distance de A, B et D, et remplit seul cette condition : ainsi C est le centre du *cercle unique* qui passe par les trois points.

Les perpendiculaires FI et HE ne se rencontreroient pas si les trois points A, B et D étoient en ligne droite; (181, 1°.), et le problême seroit impossible. Mais dans tout autre cas FI coupera HE, puisque sans cela, AB perpendiculaire à HE le seroit aussi sur FK parallèle à HE; l'angle K seroit droit, ainsi que E, ce qui est absurde (175).

Donc 1°. Deux cercles ne peuvent avoir trois points communs sans se confondre.

2°. Il est facile de trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné : il suffit d'y marquer trois points A, B et D, et de faire la construction qu'on vient d'indiquer.

188. Une droite ne peut couper un cercle en plus de deux points, puisque s'ils avoient trois points communs, en y menant des rayons, on auroit trois obliques égales (178).

24. Une ligne TG qui ne rencontre le cercle qu'en un point F s'appelle *Tangente* : alors tout autre point G de cette ligne étant hors du cercle, CG est $> CF$; donc CF est la plus courte distance de C à TG, c'est-à-dire que *le rayon* CF *est perpendiculaire sur la tangente* TG.

Réciproquement, si CF est perpendiculaire sur TG comme toute oblique CG est $> CF$, tout autre point G de TG est hors du cercle et TG est tangente.

Ainsi, pour mener une tangente en F au cercle CA, il faut mener le rayon CF et sa perpendiculaire TG, (179 et 208, I).

25. 189. Etant donnés deux points, l'un en A sur la droite

AT, l'autre en B, cherchons le cercle qui passe en A et B, et qui touche la droite AT. Alors AB sera une corde ; EF perpendiculaire sur le milieu de AB contiendra le centre ; il sera aussi sur AG perpendiculaire à AT ; donc il sera à l'intersection C. Le rayon sera AC. 25.

190. Soient deux cordes parallèles AB DE, et le rayon CF perpendiculaire à l'une et à l'autre ; on a (184) l'arc $AF = BF$ et $DF = FE$; en soustrayant, il vient $AD = EB$. Les deux cordes peuvent encore comprendre entre elles le centre C ; telles sont AB et $D'E'$; on a alors $AF = FB$, $D'F' = F'E'$; en soustrayant ces deux équations de la demi-circonférence $FAF' = FBF'$, il vient $AD' = BE'$. Ainsi, *les arcs compris entre deux cordes parallèles sont égaux.* 24.

La même chose a encore lieu pour une corde AB et la tangente TG qui lui est parallèle ; car le rayon FC mené au point de contact F, étant perpendiculaire à la tangente, l'est aussi à AB ; donc $AF = FB$.

5°. *Des Intersections de Cercles.*

191. Soient deux cercles C et C' qui ont un point commun M, hors de la ligne CC' qui joint leurs centres ; menons MN perpendiculaire sur CC', et prenons $MI = IN$. Les obliques égales CM et CN prouvent que N est un point de la circonférence C ; N est aussi sur la circonférence C' ; car $C'M = C'N$. Donc, ces circonférences ont un second point commun en N. Par conséquent : 26.

1°. *Lorsque deux circonférences se coupent, la ligne qui joint leurs centres est perpendiculaire au milieu de la corde commune ; de plus, la distance des centres est plus petite que la somme des rayons, et plus grande que leur différence* ; en effet, on a visiblement. . . .

26. $CC' < CM + C'M$ et $CC' + C'M > CM$ ou. . . . $CC' > CM - C'M$;

27. 2°. *Si les circonférences n'ont qu'un seul point commun, il est situé sur la ligne qui joint les centres, et réciproquement : en outre, la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des rayons ; car on a.* . . . $CC' = CA + C'A$, ou $CC'' = CA - C''A$ suivant que l'un des cercle est extérieur ou intérieur à l'autre.

28. 3°. Enfin, *si les cercles n'ont aucun point commun, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons ou plus grande que leur somme*, suivant que les cercles sont ou ne sont pas compris l'un dans l'autre ; car on a $CD = DO - CA - AO$, et. . . . . . . $CC' = CA + C'B + AB$.

On conclut de là que D étant la distance des centres, R et r les rayons, *on a*, *lorsque les circonférences*

se coupent . . . . $D < R + r$ *et* $D > R - r$

se touchent { *extérieurement* . . . . $D = R + r$
{ *intérieurement* . . . . $D = R - r$

n'ont aucun point commun et sont l'un à l'autre { *extérieurs* . . . . . $D > R + r$
{ *intérieurs* . . . . . $D < R - r$

192. La réciproque de chacune de ces propositions est également vraie.

En effet, si par exemple on a $D = R + r$, et si on suppose que les cercles ne se touchent pas extérieurement, il faut admettre l'une des quatre autres dispositions. Or, 1°. s'ils se coupent, on a $D < R + r$, ce qui est contraire à la supposition ; 2°. s'ils se touchent intérieurement, on a $D = R - r$, ce qui ne peut être, puisque $D = R + r$, etc. On vérifiera de même les autres réciproques (*).

(*) En général, lorsqu'on a prévu tous les cas possibles d'un

193. Il est donc inutile de tracer des cercles dont on connoît les centres et les rayons, pour savoir s'ils se coupent ou se touchent.

La tangente AT menée à un cercle en son point de contact A avec un autre, est aussi tangente à ce dernier. 27.

Etant donnés deux points l'un en B, l'autre en A sur un cercle C', pour décrire une circonférence qui passe par ces points et touche ce cercle C', on mènera la tangente AT, et le problème sera ramené à celui du n°. 189. 25.

6°. *Des Triangles.*

194. Un *Triangle* est un espace ABC renfermé par trois droites AB BC et AC qu'on nomme ses *Côtés :* il est *Scalène*, si ses côtés sont inégaux, fig. 39; *Équilatéral* s'ils sont égaux, fig. 30, *Isoscèle* lorsqu'il a seulement deux côtés égaux, fig. 31; quand il a un angle droit, le triangle est *Rectangle*, fig. 32; le côté BC opposé à l'angle droit A est nommé *Hypothénuse.* 30, 31, 32, 33. 31.

Le *Sommet* d'un triangle est l'un quelconque de ses angles, tel que C; la *Base* est le côté AB opposé; la *Hauteur* est la perpendiculaire CD menée du sommet sur la base. 31.

195. Prolongeons l'un des côtés AC du triangle ABC, et menons CD parallèle à AB : l'angle DCK sera égal à son correspondant A, et l'angle BCD à son alterne interne B. Donc, 1°. l'angle extérieur BCK vaut la somme des deux intérieurs opposés A et B. 33.

---

système, et que chacun comporte des conditions qui ne peuvent coexister avec celles que donnent les autres cas, les réciproques ont lieu et se démontrent comme on vient de le voir; c'est ce qu'on remarque dans la théorie des obliques, n°. 177, ainsi que n°. 199, etc.

33. 2°. *Les trois angles de tout triangle, réunis, valent deux droits.* Nous représenterons dorénavant par D l'angle droit, de sorte que nous écrirons $A + B + C = 2D$.
33 et Si donc on fait l'angle $KOL = C$, $LOM = B$, $MON = A$,
34. la ligne ON sera le prolongement de OK. Deux angles d'un triangle étant donnés, il sera facile de trouver le troisième par cette construction.

3°. Deux triangles qui ont deux angles égaux sont équiangles.

4°. Un triangle peut avoir tous ses angles aigus, mais il ne peut en avoir qu'un seul droit ou obtus.

32. 5°. Les deux angles C et B aigus d'un triangle rectangle ABC sont complément l'un de l'autre.

38. 6°. Lorsque les angles A et C à la base sont aigus, la perpendiculaire BD abaissée du sommet tombe dans l'intérieur du triangle ; elle tombe en dehors pour le triangle ABC' qui a un angle obtus en C'. On conçoit en effet que sans cela le triangle BDC' auroit un angle droit et un angle obtus.

36. 7°. *Les angles dont les côtés sont respectivement perpendiculaires, sont égaux ou supplémens, suivant qu'ils sont tous deux de même nature*, comme BAC et $B'A'C$, *ou que l'un est aigu et l'autre obtus*, tels que BAC et $C'AD$; car en prolongeant $A'B'$ et $A'C'$ jusqu'à leur rencontre avec les côtés AB AC qui leur sont perpendiculaires, les triangles rectangles ADF $A'D'F$ ont les angles A et A' égaux.

37. 196. *Deux triangles* ABC A'B'C' *sont égaux lorsqu'ils ont respectivement, ou* 1°. *deux côtés égaux comprenant un angle égal*, AB = A'B', AC = A'C', A = A'. En effet, appliquons $A'B'C'$ sur ABC, de manière que $A'B'$ couvre son égal AB, le côté $A'C'$ tombera sur AC, à cause de $A = A'$; de plus C' tombera visiblement en C.

Où 2°. un côté égal AB = A'B', *ainsi que deux angles égaux placés de la même manière*, tels que $A = A'$ et $B = B'$; ou $A = A'$ et $C = C'$, (les trois angles sont alors égaux chacun à chacun, 195,3°.). En plaçant encore $A'B'$ sur AB, les côtés $A'C'$ et $B'C'$ devront prendre les directions AC et BC. 37.

197. Un triangle est donc déterminé lorsqu'on en connoît deux côtés m et n, et l'angle k qu'ils forment (Fig. 29), ou un côté n et deux angles k et l, (Fig. 35). Dans le premier cas, on fera un angle $A = k$ et sur ses côtés indéfinis AG et AH, on prendra $AB = m$ et $AC = n$; enfin on mènera BC. Dans le second cas, si les angles donnés ne sont pas adjacens au côté m, on cherchera d'abord le troisième angle (195,2°.), de sorte que les angles connus k et l puissent être regardés comme adjacens au côté donné n. Sur l'un des côtés indéfinis de l'angle $A = k$, on prendra $AC = n$; on mènera BC qui fasse l'angle $C = l$. ABC sera le triangle demandé. 29 et 35. 29. 35.

Donc, ***deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont, outre les hypothénuses égales, un angle aigu égal.***

198. Voyons maintenant ce qui arrive lorsque deux triangles ont deux côtés respectivement égaux, mais un angle compris inégal. Appliquons l'un de ces triangles sur l'autre, de manière à faire coïncider l'un des côtés égaux AB; les triangles seront disposés comme ABC et ABC', et on aura $BC' = BC$. Cela posé, il se présente trois cas. 38, 39 et 40.

1°. Si C' tombe sur AC, il est visible que $AC' < AC$. 38.

2°. Si C' tombe hors de ABC, les triangles BIC AIC' donnent $BC < BI + IC$, $AC' < C'I + AI$; ajoutant ces inégalités, on a $BC + AC' < BC' + AC'$, ou... $AC' < AC$, à cause de $BC = BC'$. 39.

3°. Enfin, si C' tombe au-dedans de ABC, on a (158) $AC' + C'B < AC + CB$; d'où $AC' < AC$. 40.

Donc en général, *lorsque deux triangles ont deux côtés respectivement égaux, l'angle compris et le troisième côté sont ensemble plus grands ou plus petits dans l'un que dans l'autre.* La réciproque est également vraie, puisque
39. si $CB = C'B$ et $AC' < AC$, on ne peut supposer l'angle $ABC' = ABC$; car les triangles ABC ABC' seroient alors égaux (196) : de même l'angle $C'BA$ ne peut être $> CBA$, puisqu'il s'ensuivroit $AC' > AC$. (*Voy.* note, n°. 192).

Quoique notre démonstration n'exige pas qu'on soit assuré de la possibilité des trois cas que nous avons successivement examinés, on peut cependant la reconnoître; car les trois angles de tout triangle valant deux droits, en désignant par $A\ B\ C$, $A'\ B'\ C'$ les angles des triangles ABC ABC', on a $A + B + C = A' + B' + C'$: la condition que l'angle $C'BA$ soit $< CBA$, ou $B' < B$ donne $A + C < A' + C'$, ce qui n'établit rien sur la grandeur relative des angles A et A', ou C et C'. Si donc $A = A'$, le premier cas aura lieu (fig. 38), et de plus C sera $< C'$. Si $A > A'$, on sera dans le troisième cas (fig. 40), C sera encore $< C'$: enfin, dans le deuxième cas (fig. 39) où $A < A'$, C peut être $=>$ et $< C'$.

37. 199. Il suit de là que, 1°. *Deux triangles qui ont les trois côtés respectivement égaux, sont égaux*; car, si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ et qu'on supposât $A >$ ou $< A'$, il en résulteroit $BC >$ ou $< B'C'$.

26. 2°. Pour construire un triangle dont on connoît les trois côtés m, n et p, on prendra $CC' = m$, puis des centres C et C', on décrira des cercles avec les rayons $CM = n$, $C'M = p$; les intersections M et N donnent les triangles égaux CMC' CNC' qui résolvent la question. Les deux cercles ne se coupent qu'autant que l'un

quelconque des côtés m est $> n - p$ et $< n + p$. Sans cette double condition, le problème est impossible (192). 39.

200. Si AB est parallèle à CD, et AC à BD, en menant AD, on a deux triangles égaux ABD ACD, parce qu'outre le côté AD commun, ils ont l'angle $BAD = ADC$, et l'angle $BDA = DAC$; donc $AB = CD$. *Les parties de deux droites parallèles interceptées entre deux droites parallèles sont donc égales.* Le théorème, n°. 183,4°. n'est qu'un cas particulier de celui-ci. 41.

Réciproquement, si $AB = CD$ et si $AC = BD$, les triangles ont les trois côtés respectivement égaux, d'où on tire l'angle $DAB = ADC$, et l'angle $ADB = DAC$; donc AB est parallèle à CD, et AC l'est à BD.

Enfin, si on suppose AB égal et parallèle à CD, on en conclut que AC est égal et parallèle à BD, parce qu'on prouve encore que les triangles sont égaux.

201. Soit un triangle isoscèle ABC dans lequel $CB = CA$, menons CD au milieu de AB; les deux triangles BDC DCA sont égaux, puisque leurs côtés sont respectivement égaux; donc $A = B$. Réciproquement, si $A = B$, on doit avoir $AC = BC$; car supposant $AE = BC$, il faudroit que les triangles ABE ABC fussent égaux (196), comme ayant $A = ABC$, $AE = BC$ et AB commun. Ainsi, *dans tout triangle, les côtés égaux sont opposés aux angles égaux, et réciproquement.* 31.

1°. Tout triangle équilatéral a ses trois angles égaux; chacun vaut $\frac{2}{3} D$. Les angles du triangle scalène sont inégaux. 30.

2°. Dans le triangle isoscèle ABC, on a . . . . $C + 2A = 2D$; de sorte que $\frac{1}{2} C = ACD = D - A$ et $A = D - \frac{1}{2} C$. 31.

3°. La ligne CD menée du sommet d'un triangle isoscèle

au milieu de la base est perpendiculaire à cette base, et divise l'angle du sommet en deux parties égales.

16. 4°. Sur le côté KI d'un angle donné IKC soit pris un point quelconque E et mené ED parallèle à KC; enfin, soit pris $KE = EF$ et tiré KF, le triangle isoscèle KEF donne l'angle $EKF = F$; mais $F = FKC$ qui est alterne interne; donc KF divise l'angle IKC en deux parties égales. De même $KF = FD$ donne l'angle $DKC = \frac{1}{4} IKC$, etc. On peut donc diviser ainsi l'angle IKC en 2, 4, 8... 2^n parties égales.

43. 202. Soit un triangle BAC, qui ait l'angle $A > C$; dans l'angle A, formons $DAC = C$; le triangle isoscèle DAC aura $DA = DC$, d'où $BA < BD + DA$, ou $< BC$. Réciproquement, si $BA < BC$, on doit avoir l'angle $C < BAC$; car s'il n'en étoit pas ainsi, on auroit $BAC =$ ou $< C$, ce qui entraîneroit $BC =$ ou $< BA$. Ainsi, *de deux côtés d'un triangle, celui-là est le plus grand qui est opposé à un angle plus grand, et réciproquement.*

38. 203. *Construire un triangle dont on connoît deux côtés* a *et* c, *et l'angle* K *opposé au premier.* On prendra $AB = c$ sur l'un des côtés indéfinis de l'angle $A = K$; puis du centre B et d'un rayon $BC = a$, on décrira un cercle; les points d'intersection C et C' avec la ligne AC, détermineront les triangles ABC ABC' qui l'un et l'autre satisfont à la question. Il se présente ici plusieurs cas.

38. 1°. Si le rayon du cercle est plus petit que la perpendiculaire BD, ce cercle ne coupera pas AC, et le problème sera impossible : alors $a < BD$.

2°. Si le rayon est égal à la perpendiculaire, ou $a = BD$, le triangle ABD rectangle satisfait seul à la question.

Donc, *deux triangles rectangles sont égaux, quand ils ont l'hypothénuse et un côté respectivement égaux.*

3°. Si le rayon est plus grand que BD, mais moindre que AB, les obliques $BC = BC'$ sont $< AB$ (et par conséquent situées d'un même côté de AB, 177), donnent les triangles ABC ABC'. Il y a donc deux solutions lorsque $a > BD$ et $< c$. Remarquons que l'angle C est supplément de $AC'B$, à cause des angles égaux du triangle isoscèle BCC' : ainsi, l'un de nos deux triangles est *Acutangle*, et l'autre *Obtusangle*. Si la nature du triangle cherché étoit connue d'avance, l'une des solutions seroit alors exclue.

4°. Enfin, si $a > c$, BC et BC' tombent des deux côtés de AB, et la question n'a qu'une solution : c'est ce qui arrive toutes les fois que l'angle donné $K = A$ est droit ou obtus, car alors a doit être $> c$. Ce cas pourroit aussi se rencontrer lorsque K est aigu; alors l'angle BCA seroit $< BAC$, et c'est pour cela qu'il n'y a qu'une solution puisque l'angle BCA ne peut être obtus. 44.

Deux triangles qui ont deux côtés et un angle opposé respectivement égaux, sont donc égaux, quand ils sont de même nature, (obtusangles, acutangles ou rectangles l'un et l'autre) (*).

204. Soient deux cordes égales CD AB; menons les perpendiculaires OI OK; les triangles rectangles OCI OAK sont égaux, à cause de CI et AK qui sont moitiés des cordes; donc $OI = OK$. Réciproquement si $OI = OK$ 45.

(*) En récapitulant tous les cas d'égalité de deux triangles, on peut dire que *deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont trois des parties qui les composent égales respectivement*; mais il faut 1°. exclure le cas de trois angles égaux ; 2°. exiger que quand il y a deux angles égaux, ils soient placés de même ; 3°. enfin, sous-entendre que dans le cas où on a deux côtés égaux et un angle opposé égal, les triangles soient de même nature.

les triangles sont encore égaux, d'où $CD = AB$. Donc *les cordes égales sont à la même distance du centre, et réciproquement.*

Si, par un point donné M (intérieur ou extérieur au cercle), on veut mener une corde CD d'une longueur donnée, on portera cette longueur en AB arbitrairement sur la circonférence, puis menant la perpendiculaire OK et traçant le cercle KI, la corde cherchée sera tangente à cette courbe. Il ne s'agira donc plus que de mener cette tangente (208, II.), et on aura les deux solutions du problême.

42. 205. Si, au contraire la corde AB est $> CD$, sur l'arc $AEB > CFD$ (162,4°.), prenons l'arc $AE = CD$; la corde AE sera $= CD$ et à la même distance du centre O, d'où $OL = OI$. Cela posé, comme AE tombe en dehors de AB, on a $OI > OG$ et par conséquent $> OK$. Réciproquement si OL est $> OK$, la corde CD est $> AB$, ce qui est aisé à voir (note 192). Donc *de deux cordes inégales la plus grande est la plus voisine du centre, et réciproquement.*

206. Voici plusieurs problêmes dont la solution dépend des principes précédens.

46. I. *Inscrivons un cercle dans un triangle* ABC, c'est-à-dire, traçons une circonférence tangente aux trois côtés. Si le point O est à distances égales OF OE des côtés AB BC, les triangles AEO OAF sont égaux : ainsi les points également éloignés de AB et BC sont tous situés sur la ligne AO qui coupe l'angle A en deux parties égales : chacun de ses points O jouit d'ailleurs de cette propriété, puisque si l'angle $OAF = OAE$, les triangles AEO AFO sont égaux. Ainsi tout cercle décrit d'un point quelconque O pris sur AO, avec le rayon OF est seul tangent à AB et AC.

On en dira autant de la droite CO qui coupe l'angle C en deux parties égales ; de sorte que le point O, où se coupent AO et CO, est à la même distance de AB AC et BC, et jouit seul de cette propriété. O est dont le centre, et OF le rayon du cercle inscrit.

On ne peut inscrire qu'un seul cercle. Menant OB, l'égalité des triangles égaux OBF OBD, prouve que OB divise l'angle B en parties égales.

Soit p le contour ou *Périmètre* du triangle ; comme on a $AF = AE$, $BF = BD$, $CE = CD$, on en tire . . . . $p = 2AF + 2BD + 2CD$, ou $p = 2AF + 2BC$, d'où $AF = \frac{1}{2}p - BC = AE$. Il est donc aisé de trouver les points F, E et par suite D, puisque $CE = CD$: on pourra donc encore résoudre le problème en faisant passer une circonférence par les trois points D E F.

II. Décrire un cercle dans lequel deux droites données 22.
$AB = m$, $AD = n$, sous-tendent des arcs doubles l'un de l'autre. Comme le triangle ADB doit être isoscèle, après avoir tiré $AB = m$, on décrira des centres A et B avec le rayon n, des arcs qui détermineront le triangle ABD, auquel il ne s'agira plus que de circonscrire un cercle.

III. Construire le triangle rectangle BAC dont un côté 47.
AB de l'angle droit, et le périmètre BE sont donnés. Puisque $BC + CA = AE$, élevons en A la perpendiculaire $AD = AE$; nous aurons $BC = CD$, et le triangle BCD sera isoscèle : ainsi CI perpendiculaire au milieu de BD donnera le point C.



47. 7. *Mesure des Angles dans le Cercle.*

207. Nous connoissons la mesure des angles dont le sommet est au centre (169); cherchons cette mesure lorsque l'angle est situé d'une manière quelconque; et d'abord examinons le cas où l'angle est formé par deux cordes, le sommet étant sur la circonférence; on dit alors que l'angle est *Inscrit.*

48. 1°. Si l'un des côtés passe par le centre C, tel que l'angle GAD, en menant EF parallèle à AG, on a $GE=AF$, (190); mais on a aussi $ED=AF$, à cause des angles égaux ACF et DCE; ainsi E est le milieu de l'arc GD, et l'angle ECD ou son égal GAD (182), a pour mesure la moitié de l'arc GD.

2°. Si le centre est entre les côtés comme pour l'angle BAG, en menant le diamètre AD, les angles BAD, DAG ayant pour mesure la moitié de BD et de DG, la somme donne la moitié de l'arc BDG pour mesure de l'angle BAG.

3°. Si le centre est hors de l'angle, comme pour HAB, on a de même $\frac{1}{2}$ HD et $\frac{1}{2}$ BD pour mesures des angles HAD BAD; en retranchant, on a $\frac{1}{2}$ HB pour celle de l'angle HAB.

4°. Enfin, s'il s'agit de l'angle TAB, formé par une tangente AT et par une corde AB; le diamètre AD est perpendiculaire sur AT, l'angle TAD a donc pour mesure le quadrans ou la moitié de l'arc ABD; on trouve donc $\frac{1}{2}$ AHB pour celle de l'angle TAB.

Donc *l'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés; et réciproquement* si un angle BAG a pour mesure $\frac{1}{2}$ BG, le sommet A est sur la circonférence : cela se démontre aisément par l'absurde.

Prolongeons HA en K; la moitié de l'arc GAH est la

mesure de l'angle *KAG*, supplément de *HAG*. On verra aisément que 48.

1°. *L'angle inscrit dans le demi-cercle est droit*, car l'angle *BAD* a pour mesure la moitié de la demi-circonférence ; 49.

2°. Tous les angles inscrits *A*, *C*, *D*,... qui s'appuient sur le même arc *BE*, ayant même mesure, sont égaux ; 50.

3°. Si un angle *BAE*, de grandeur fixe, se meut de manière que ses côtés passent sans cesse l'un en *B*, l'autre en *E*, le sommet prenant successivement les positions *A*, *C*, *D*,... décrira la circonférence.

208. On résout divers problèmes à l'aide de ce théorême.

I. *Abaisser une perpendiculaire* AD *à l'extrémité d'une ligne* AB *sans la prolonger.* Puisque l'angle *BAD* doit être droit, toute ligne *BD* doit être le diamètre d'un cercle passant en *A* ; on décrira donc, du centre quelconque *C*, un cercle qui passe par le point *A*; puis par le point *B* où ce cercle coupe *AB*, on mènera le diamètre *BD*, qui donnera un point *D* de la perpendiculaire cherchée. On peut appliquer cette construction au problême du n°. 188. 49.

II. *Par un point extérieur* D *mener une tangente* AD *au cercle* CAB. Puisque l'angle *CAD* formé par la tangente et le rayon doit être droit, il est inscrit dans le demi-cercle dont *CD* est le diamètre. On décrira donc cette circonférence *CADB*, elle coupera le cercle proposé *CAB* au point de contact *A* ; on aura, outre la tangente *AD*, une autre solution *BD*, et il devient prouvé que ces deux lignes satisfont seules à la question. 51.

III. *Partager l'angle* ACB *en trois parties égales.* Traçons du sommet *C* le cercle *FAB*, concevons la ligne 52.

52. AO telle que l'angle $O = \frac{1}{3} ACB$. L'angle extérieur ACB ou $3O = O + A$, d'où $2O = A$. Mais le triangle isocèle FCA donne $A = AFG$, de sorte que A a pour mesure $\frac{1}{2} AG$, c'est-à-dire $= \frac{1}{2} ACG$: on a donc

$$A = \tfrac{1}{2} ACB + \tfrac{1}{2} BCG = \tfrac{3}{2} O + \tfrac{1}{2} BCG\,;$$

$2O = A$ devient donc $O = BCG$ ou $= FCO$. Ainsi le triangle FCO est isoscèle, et $OF = FC =$ le rayon du cercle.

Le problême proposé consiste donc à savoir mener la droite AO telle que la partie extérieure OF soit égale au rayon; car alors l'angle O et l'arc BG ou FI seront les tiers l'un de l'angle ACB, l'autre de l'arc AB. Mais il n'appartient pas à la géométrie élémentaire de donner des moyens de mener cette droite AO ; comme on n'y traite que des propriétés de la ligne droite et du cercle, on n'y emploie aussi que la règle et le compas; on verra d'ailleurs des moyens d'opérer la *trisection de l'angle* (463, I), ce qu'on ne peut faire ici que par un tâtonnement.

53. IV. Décrire un cercle qui passe en deux points donnés B, E, et qui soit tel que les angles inscrits BOE soient égaux à un angle donné A; c'est ce qu'on appelle *décrire sur une droite* BE *un segment capable de l'angle donné* A. La tangente en E fera aussi l'angle . . . . $BEK = A = O$ (207, 4°.); si donc on mène la droite KE telle que l'angle BEK soit $= A$, elle sera tangente. La question est donc réduite à faire passer en B un cercle tangent à KI au point E (189), on élevera les perpendiculaires CE à KI, et CG au milieu de BE; C sera le centre.

Cette construction est souvent employée, sur-tout lorsqu'il s'agit de former un triangle dans lequel on connoît,

entre autres choses, un côté et un angle opposé; c'est 53.
ce qui a lieu dans les questions suivantes.

V. Décrire un triangle dont on connoît la base b, la 54.
hauteur h et l'angle A du sommet. Après avoir tracé $BE=b$ et sa parallèle DD', à la distance $HG=h$ de BE, on décrira sur BE un segment capable de l'angle donné A, et les points où DD' coupera le cercle, donneront pour solutions les triangles égaux BDE $BD'E$.

VI. Soient trois points B A C tracés sur une carte, 39.
fixer le lieu d'un quatrième point C', connoissant les angles $BC'C, BC'A$; on décrira sur BC le segment capable de l'angle $BC'C$, ainsi qu'on vient de le dire; de même sur BA le segment capable de $BC'A$, le point C' sera à l'intersection des deux circonférences.

VII. Construire un triangle dont on connoît la base 46.
AB, l'angle opposé C et le rayon OF du cercle inscrit. Puisque OA et OB divisent en deux parties égales les angles A et B du triangle cherché ABC; dans le triangle AOB, l'angle O supplément de $OAF+OBF$, est $=\frac{1}{2}(A+B)$; d'où $O=2D-\frac{1}{2}(A+B)$, et comme $A+B=2D-C$ on a $O=D+\frac{1}{2}C$. L'angle O étant connu, on retombe sur le problème V : on décrira sur AB un segment capable de l'angle O, etc.

VIII. Etant donnés un triangle $A'B'C'$ et deux circon- 55.
férences concentriques AO, CO, construire un triangle ABC qui ait deux sommets A et B sur la grande circonférence, et l'autre C sur la petite, et qui soit équiangle au proposé $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$.

L'angle A ayant pour mesure $\frac{1}{2}BD$, si de A', comme centre, et du rayon AO on décrit l'arc HI, il sera moitié de BD. On prendra donc en un lieu quelconque l'arc $BD=2.HI$; les côtés AB et AC passeront par B et D;

55. de plus l'angle *BCD* étant supplément de *C'*, on aura le lieu du sommet, en décrivant sur la corde *BD* un segment *BCcD* capable de cet angle ; *DCA* donnera le triangle cherché.

Il y a une infinité de solutions, car outre le point *c* qui donne le triangle *aBc*, on peut attribuer à la corde *BD* diverses situations.

56 et 57. 209. Cherchons la mesure de l'angle *BAC* dont le sommet *A* est en un lieu quelconque du cercle.

56. 1°. Si *A* est situé dans la circonférence, en prolongeant ses côtés en *D* et *E*, puis menant *EF* parallèle à *DC*, la mesure de l'angle $E = BAC$ est

$$\tfrac{1}{2} BF = \tfrac{1}{2}(BC + CF) = \tfrac{1}{2}(BC + DE.)$$

57. 2°. Si *A* est situé hors du cercle, en menant *EF* parallèle à *AB*, la mesure de l'angle $A = CEF$ est $\tfrac{1}{2} CF = \tfrac{1}{2}(CB - BF) = \tfrac{1}{2}(CB - ED.)$

Ainsi, la mesure de l'angle *A* est dans un cas *la moitié de la somme*, et dans l'autre, *la moitié de la différence des arcs compris entre ses côtés*, ou $\frac{1}{2}(a \pm b)$, en faisant $a = BC$, $b = DE$. Cette formule est même générale, car $b = 0$ répond au cas où le sommet est sur la circonférence, et $b = a$ à celui où il est au centre.

8. *Des Lignes proportionnelles, Triangles semblables....*

58. 210. Soient deux droites quelconques *AH*, *ah* : si sur l'une on prend des parties égales *AB BC CD....* et que par les points de division, on mène des parallèles *Aa Bb Cc... Hh* dans une direction arbitraire, les parties *ab bc cd....* qu'elles intercepteront sur *ah* seront égales entre elles ; car, si on mène *ai bl cm....* parallèles à *AH*, on aura des triangles *aib blc cmd....* égaux entre eux, à cause de $ai = bl = cm$... ainsi $ab = bc = cd = ...$

Il suit de là que AB sera contenu dans AH autant **58.**
de fois que ab dans ah, ou $\frac{AB}{AH} = \frac{ab}{ah}$.

211. Soient deux droites AH et ah coupées par trois **59.**
parallèles quelconques Aa Ee Hh, elles le seront en parties proportionnelles, on $\frac{AE}{EH} = \frac{ae}{eh}$; car,

1°. Si les parties AE EH sont commensurables, en portant la commune mesure sur AH, elle sera contenue un nombre exact de fois dans AE et EH : on retombera donc dans le cas ci-dessus, parce que les parallèles à Aa Bb... menées par les points de division couperont ah en parties égales.

2°. Si AE et EH sont incommensurables, divisons AE en un nombre arbitraire de parties égales, et portons l'une d'elles de E vers H ; soit I le point de division le plus près de H ; menons Ii parallèle à Hh. Cela posé, AE et EI étant commensurables, on a . . . $\frac{EI}{EA} = \frac{ei}{ea}$: et comme $EI = EH - HI$; $ei = eh - hi$; il vient $\frac{EH}{EA} - \frac{HI}{EA} = \frac{eh}{ea} - \frac{hi}{ea}$. Or, les distances HI et hi peuvent être rendues aussi petites qu'on voudra, en prenant le nombre n de plus en plus grand ; les autres parties restent constantes, de sorte que les points H et h sont les limites de I et i. Le principe fondamental (167) donne donc encore $\frac{EH}{EA} = \frac{eh}{ea}$.

On a donc en général $\frac{AE}{EH} = \frac{ae}{eh}$, d'où (73), $\frac{AE}{AH} = \frac{ae}{ah}$: ainsi

$$\frac{AH}{ah} = \frac{AE}{ae} = \frac{EH}{eh}.$$

212. La même chose a lieu pour deux droites quelconques

59. qui se coupent ; car menons AC parallèle à ah, on a $AB = ae$, $BC = eh$: ainsi $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{EH}{BC}$. *Une parallèle à la base d'un triangle coupe donc les côtés en parties proportionnelles.*

Réciproquement, si on a $\frac{AE}{EH} = \frac{AB}{BC}$, EB est parallèle à HC ; car si cela n'etoit pas, menant HL parallèle à EB, on auroit $\frac{AE}{EH} = \frac{AB}{BL}$; donc $BL = BC$.

213. Il suit de là que, 1°. lorsqu'on a trois lignes m n p, il est facile de *trouver une quatrième proportionnelle*, c'est-à-dire, une ligne x, telle qu'on ait $\frac{m}{n} = \frac{p}{x}$. On fera un angle quelconque HAC, et on prendra sur ses côtés. . . . $AE = m$, $AB = n$, $AH = p$; puis menant EB et sa parallèle HC, AC sera la quatrième proportionnelle cherchée.

60. 2°. *Les lignes quelconques* AB AC AD AE AF..... *passant par un même point* A, *sont coupées en parties proportionnelles par les parallèles* BF *bf*; car en n'ayant égard qu'à AB et AC, on a $\frac{AB}{Ab} = \frac{AC}{Ac}$; de même AC et AD donnent $\frac{AC}{Ac} = \frac{AD}{Ad}$, etc. Réunissant ces proportions qui ont un rapport égal, il vient . . . . $\frac{AB}{Ab} = \frac{AC}{Ac} = \frac{AD}{Ad} = \frac{AE}{Ae} = \frac{AF}{Af}$. . .

61. 3°. *Pour diviser une droite donnée* AF *en plusieurs parties égales*, par exemple en cinq ; on mènera une ligne quelconque indéfinie aF, sur laquelle on portera cinq fois l'ouverture de compas arbitraire $Fe = ed = dc = \ldots$ puis menant Aa et les parallèles Bb Cc Dd Ee, on aura $AB = BC = CD = \ldots$

4°. Pour *partager une ligne donnée* AF, *en parties proportionnelles à celles d'une autre droite donnée* af, on tirera la ligne quelconque $a'F$, sur laquelle on portera $Fe' = fe$, $d'e' = de$, $d'c' = dc$.... ; puis menant Aa' et les parallèles Bb'..., on aura les points de division cherchés B, C, D, E. 62.

214. Deux triangles ABC $A'B'C'$ dont les angles sont respectivement égaux, sont nommés *Semblables* ou *Équiangles*: les côtés de même dénomination sont appelés *Homologues*. Soient $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$; AB est homologue de $A'B'$, BC de $B'C'$, AC de $A'C'$. *Les côtés homologues se distinguent en ce qu'ils sont opposés aux angles égaux.* 63.

Deux triangles semblables ont les côtés homologues proportionnels. En effet, plaçons le triangle $A'B'C'$ sur ABC, de sorte que le côté $A'C'$ tombe sur son homologue AC de A en E ; $A'B'$ tombera sur AB de A en D, à cause de $A = A'$. Mais l'angle $AED = C' = C$; donc DE est parallèle à BC, (181); et on a $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Menons ensuite EF parallèle à AB, nous aurons. . . . . $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$; et comme (200) $BF = DE = B'C'$, on a enfin

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Réciproquement, si $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$, prenons $AD = A'B'$, et menons DE parallèle à BC, nous aurons $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$; et à cause du premier rapport qui est commun, $\frac{A'C'}{AC} = \frac{AE}{AC}$, $\frac{B'C'}{BC} = \frac{DE}{BC}$: donc. . . .

63. $A'C' = AE$, $B'C' = DE$. Les triangles ADE $A'B'C'$ sont égaux, et par conséquent ABC $A'B'C'$ sont équiangles. Ainsi, *deux triangles qui ont les côtés homologues proportionnels sont semblables.*

215. Supposons $A = A'$, et $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$; en appliquant $A'C'$ de A en E, $A'B'$ tombera en AD et $B'C'$ en DE. Or, par hypothèse, on a $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, donc DE est parallèle à BC (212), et les triangles ABC et ADE ou $A'B'C'$ sont équiangles. Ainsi, *deux triangles qui ont un angle égal, compris entre côtés proportionnels, sont semblables.*

63. 216. Concluons de là, que 1°. *deux triangles dont les côtés sont respectivement parallèles, sont semblables.* Cela est évident pour ABC et $A'B'C'$ (183,3°.); quant à ABC et $C'IH$, en prolongeant les côtés en A' et B', puis menant $A'B'$ parallèle à HI ou AB, on a $I = A'$, $H = B'$ comme alternes internes. Ainsi, $C'IH$ étant équiangle à $A'B'C'$ l'est à ABC. *Les côtés parallèles sont homologues.*

64. 2°. *Deux triangles* ABC A'B'C' *dont les côtés respectifs sont perpendiculaires, sont semblables*; car soient prolongés les côtés $A'C'$ $B'C'$ jusqu'à leur rencontre en F et E avec AC, les angles C et E sont complémens; ainsi que C' et E, à cause des triangles rectangles ECG $EC'F$: donc $C = C'$. On prouve de même que $A = A'$, $B = B'$. *Les côtés perpendiculaires sont homologues.*

60. 3°. *Les lignes* AB AC AD.... *partant d'un même point* A, *coupent en parties proportionnelles deux parallèles quelconques* BF, *bf*; car les triangles ABC Abc sem-

blables donnent $\frac{AC}{Ac}=\frac{BC}{bc}$; de même ACD Acd donnent 60.
$\frac{AC}{Ac}=\frac{CD}{Cd}$; ainsi, on a $\frac{CD}{cd}=\frac{BC}{bc}$. On a de même. . $\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}$ . . . . La réciproque se démontre aisément.

4°. C'est sur ces principes qu'est fondée la construction des *Échelles*. Après avoir porté un certain nombre quelconque de parties égales sur une droite indéfinie CI, par exemple 5, de C en D, on élève par les points 65.
de division des perpendiculaires, puis on porte de même sur CA 5 parties égales arbitraires Ca ac.....; par les points $a\,c\,e$.... on mène des parallèles indéfinies à CI; enfin, on tire les *Transversales* CB, $5F$,.... il suit de cette construction que puisque Ca Cc Ce... sont $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$.... de CA, ab cd ef... sont de même $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$... de AB; eo est $= ef + fo$ ou $(\frac{3}{5}+\frac{15}{5})$ de AB, ou enfin $\frac{18}{25}$ de CD.

On a donc ainsi partagé la ligne CD en 25es, ce qu'on n'auroit pu faire autrement, d'une manière aussi distincte, vu la petitesse des parties. On peut se servir de cette échelle pour diviser toute droite en parties égales : on cherche combien cette droite contient de parties de l'échelle, en portant une ouverture de compas égale sur une des parallèles indéfinies, et observant qu'elle réponde à des divisions à-peu-près exactes : si par exemple elle tombe de L en o, la ligne contient 57 divisions. On partage ensuite ce nombre en autant de parties qu'on veut.

Cette échelle est sur-tout employée pour réduire les lignes d'un dessin dans un rapport donné : on a coutume de former CD et CA de 10 parties, et de numéroter convenablement les transversales, afin d'en faciliter l'usage. C'est alors une *échelle de dixmes*. 66.

59. 5°. Si les lignes Aa Ee Hh sont parallèles et équidistantes, E et e seront les milieux de AH et ah; et réciproquement. De plus, Ee est la moitié de $Aa + Hh$ puisqu'en menant AC parallèle à ah; $EB = \frac{1}{2} HC$, et que Be, égal à Aa et Ch, est moitié de la somme de ces deux lignes.

67. 217. Soit un triangle ABC rectangle en A; si on abaisse sur l'hypothénuse BC la perpendiculaire AD, les deux triangles partiels ABD ADC seront semblables entre eux et à ABC; car l'angle B est commun à ABD et ABC outre l'angle droit en D, pour l'un, et en A pour l'autre : il suit donc de là que l'angle C est égal à BAD, ou $C = \alpha$. De même C est commun entre ADC et ABC, outre l'angle droit; ainsi $\beta = B$. Les triangles ABD et ADC ont d'ailleurs les côtés perpendiculaires.

En formant des proportions avec les côtés homologues, on trouve que,

1°. Les triangles ABD et ADC donnent $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$, d'où $AD^2 = BD \times DC$; ainsi *la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de l'hypothénuse* (72).

2°. Les triangles ABD ABC donnent $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$ ou $AB^2 = BD \times BC$: de même ADC et ABC donnent $AC^2 = DC \times BC$. Ainsi *chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière et le segment correspondant.*

3°. L'équation $AB^2 = BD \times BC$ divisée par BC^2 donne $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{BD}{BC}$. *Le carré de l'hypothénuse est au carré*

d'un des côtés de l'angle droit, comme l'hypothénuse est au segment correspondant à ce côté. 67.

4°. En ajoutant les équations $AB^2 = BD \times BC$, $AC^2 = DC \times BC$, on trouve

$$AB^2 + AC^2 = BC\,(BD + DC) = BC^2:$$

ainsi *le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.* Désignant par $a\ b\ c$ les côtés opposés respectivement aux angles $A\ B\ C$, on a

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Cette proposition (47e. d'Euclide) la plus importante de toute la géométrie, apprend à trouver la longueur de l'un des côtés de tout triangle rectangle, connoissant les deux autres; on a en effet $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$ et $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$. Rapportant donc les côtés $a\ b\ c$ à une unité métrique, on en mesurera deux (156), et on conclura par un calcul simple le nombre d'unités du troisième. Soit par exemple $b = 3$, $c = 4$, on trouve $a^2 = 9 + 16 = 25$, d'où $a = 5$.

La réciproque de cette proposition résulte des deux suivantes.

218. Si l'angle A du triangle ABC est aigu, en abaissant la perpendiculaire BD sur la base AC, on a deux triangles rectangles ABD CBD, qui donnent. . . . . $BD^2 = AB^2 - AD^2 = BC^2 - DC^2$; ainsi. . . . . . . $BC^2 = AB^2 + DC^2 - AD^2$. Or, $DC = AC - AD$: (si la perpendiculaire tombe au-dehors du triangle, comme pour ABC', on a $DC' = AD - AC'$); en substituant et faisant $AD = x$, $a\ b$ et c les trois côtés BC, AC et AB du triangle, on a 38.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

38. Si l'angle A est obtus, comme pour le triangle CBA', la perpendiculaire BD tombe au-dehors, et on a. . . . . $BD^2 = CB^2 - CD^2 = BA'^2 - DA'^2$; or $CD = CA' + A'D$, d'où

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx.$$

219. Lorsque les trois côtés d'un triangle sont donnés, il est bien aisé de juger de la nature de chacun de ses angles; après avoir fait les carrés a^2, b^2 et c^2 des côtés, on comparera chacun à la somme des deux autres, et suivant qu'il sera égal plus petit ou plus grand que cette somme, l'angle opposé sera droit, aigu ou obtus.

68. 220. *Si la ligne* AC *divise en deux parties égales l'angle* A *du sommet du triangle* BAD, en prolongeant DA en E, jusqu'à la rencontre de BE parallèle à AC, on a $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{BC}$: or, l'angle $BAC = ABE = DAC$, de plus $E = DAC$; donc $E = ABE$. Le triangle EAB étant isoscèle, on a $AE = AB$; donc $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, et *les côtés sont proportionnels aux segmens de la base.*

69. 221. Soient deux cordes BE DC qui se coupent en A, en menant BC DE, les angles E et C sont égaux (207) comme étant appuyés sur le même arc BD; de même $B = D$; ainsi les triangles BAC DAE sont semblables, et en comparant les côtés homologues, on a. . . $\frac{BA}{AD} = \frac{AC}{AE}$, d'où $BA \times AE = AD \times AC$; ainsi *les parties de deux cordes qui se coupent forment des produits égaux* (*).

(*) On énonce ordinairement ainsi ce théorème et celui du n°. 224 : *les cordes se coupent en parties réciproquement proportionnelles ;*

222. Soit un diamètre BE et sa perpendiculaire DC, 70.
comme $AD = AC$, on a $AD^2 = AB \times AE$. On nomme AD une *Ordonnée*; ainsi *l'ordonnée d'un cercle est moyenne proportionnelle entre les segmens du diamètre*. Cette proposition revient à celle (217, 1°.), parce 67.
que le triangle rectangle ABC est inscriptible au demi-cercle.

Si on veut donc *une ligne* x *moyenne proportionnelle* 70.
entre deux lignes données m *et* n, on prendra sur une droite indéfinie $AB = m$, $AE = n$, on élevera une perpendiculaire DC au point A, et sur le diamètre BE on tracera un cercle BDE; AD sera x.

223. Il résulte aussi de la proposition (217, 2°.) que 67.
la corde AB *est moyenne proportionnelle entre le diamètre* BC *et le segment* BD *correspondant*. On a donc . . .

$BA^2 = BC \times BD$ et $BE^2 = BC \times BF$, d'où $\frac{BA^2}{BE^2} = \frac{BD}{BF}$: 71.
ainsi *les carrés de deux cordes qui partent d'un même point de la circonférence sont entre eux comme les segmens du diamètre qui passe par ce point.*

224. Soient deux sécantes AC AE; en menant les 72.
lignes DC BE on a les triangles semblables ABC ADE, car outre l'angle commun A, ils ont $C = E$, (207). Ainsi on a $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$, d'où $AB \times AC = AD \times AE$; donc *chaque sécante multipliée par sa partie extérieure, donne le même produit.*

225. Soient une tangente AB et une sécante AE, en 73.

---

les sécantes sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures. Nous avons préféré les énonciations ci-dessus comme comprises dans une phrase plus claire et plus facile à se présenter à l'esprit.

73. menant BD, les triangles ABD AEB sont semblables, car outre l'angle A commun, on a $E = ABD$, (207); ainsi $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$ ou $AB^2 = AD \times AE$, ainsi *la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

69 et 226. Ces théorêmes peuvent être renfermés en un seul;
72. car soient a et b les distances mesurées sur la droite AC, d'un point A à la circonférence, ou $AB = a$, $AC = b$; soient de même a' et b' les parties analogues pour une autre ligne AE, ou $AD = a'$, $AE = b'$, on a $ab = a'b'$, quel que soit l'angle sous lequel les lignes se coupent, et en quelque lieu que soit le point A. Si on fait tourner AC autour de A, les points d'intersection
73. B et C changeront, et lorsque la ligne AC sera tangente, B et C coïncideront; ainsi $a' = b'$, d'où $ab = a'^2$.

227. Voici plusieurs problèmes qu'on résout par ces divers principes.

74. I. *Mesurer la hauteur d'un édifice* AB. On plante verticalement un piquet ou *Jalon* DE, puis on dirige un rayon visuel DB au sommet B, et on marque le point C où il rencontre l'horison; on a $\frac{CE}{DE} = \frac{CA}{AB}$; tout est ici connu excepté AB.

On pratique cette opération plus commodément en se servant des longueurs AC et $C'E'$ de l'ombre que projettent les hauteurs AB $D'E'$.

75. II. *Mener une tangente à deux cercles.* Soit $AD'D$ cette tangente; joignons les centres par la ligne $AC'C$ et menons les rayons CD $C'D'$, on aura visiblement $\frac{AC'}{AC} = \frac{C'D'}{CD}$. Mais pour une sécante AI, en mettant

CI et $C'I'$, au lieu de CD et $C'D'$, on aura $\frac{AC'}{AC} = \frac{C'I'}{CI}$; 75.
donc CI est parallèle à $C'I'$: il en seroit de même de CK et $C'K'$, pour la sécante KK'.

On mènera donc deux rayons parallèles quelconques CI $C'I'$; la droite $I\,I'$ donnera le point A, par lequel on tracera la tangente à l'un des cercles; elle le sera aussi à l'autre. Lorsque les cercles ne se coupent pas, il y a une seconde solution en A', ce qui fait quatre tangentes.

III. Trouver un point C sur la circonférence ABC, 76.
tel que les droites BC AC menées à deux points donnés A et B de cette courbe, soient entre elles dans un rapport donné $= \frac{m}{n}$. En supposant le problème résolu, la ligne CE qui coupe en parties égales l'angle C (220) donne $\frac{BC}{AC} = \frac{BE}{EA} = \frac{m}{n}$: on prendra donc le milieu D de l'arc AB, et on partagera la corde AB dans le rapport donné; la droite DE donnera le point C.

IV. Etant données deux circonférences C et C' qui se 77.
coupent en E et F, puis deux points A et B sur ces courbes; mener des cordes AH BD dont les extrémités soient sur une même circonférence $ADHB$, et qui se coupent sous un angle donné.

On décrira sur AB un segment AIB capable de l'angle donné (208, IV); l'intersection I des cordes cherchées sera sur cet arc : de plus AH et BD devant être des cordes d'une même circonférence, on a (222), $AI \times IH = BI \times ID$. Or menons AE EB FD et FH, les triangles AIE IHF ayant l'angle $A = F$ sont semblables; d'où . . . . . . $IE \times IF = AI \times IH$: de même les triangles DIF IEB donnent $IE \times IF = ID \times IB$; ainsi la condition ci-dessus

77. est satisfaite par le point I où l'arc AIB du segment est rencontré par FE.

78. V. *Par le point* B *d'intersection de deux cercles, mener une droite* CD *qui ait une longueur donnée* M. Supposons le problème résolu, menons par le point B une ligne quelconque EF, et joignons A avec E C F et D; les triangles AEF ACD ont l'angle $E = C$, comme appuyés sur le même arc BIA; de même $F = D$: ainsi $\frac{EF}{CD} = \frac{AE}{AC}$ et AC est une quatrième proportionnelle à EF, M et AE; on prendra donc $FL = M$, on mènera LK parallèle à AF, AK sera $= AC$: il ne s'agira plus que de décrire du centre A, avec le rayon AK, un cercle qui donnera, par son intersection, le point C ou C' : on a ainsi les deux solutions du problème.

79. VI. Proposons-nous de couper une ligne AC en deux parties telles que la plus grande BC soit moyenne proportionnelle entre l'autre AB et la ligne entière AC; c'est ce qu'on appelle *couper la ligne* AC *en moyenne et extrême raison*. De $BC^2 = AC \times AB$, à cause de $AB = AC - BC$, on tire $BC^2 = AC^2 - AC \times BC$; d'où

$$BC^2 + AC \times BC \text{ ou } BC \times (BC + AC) = AC^2.$$

Il s'agit donc de déterminer BC, tel que AC soit moyen proportionnel entre BC et $BC + AC$. Pour cela élevons en A la perpendiculaire $AD = \frac{1}{2}AC$, menons l'hypothénuse DC, puis portons CE de C en B; le point B satisfera à la question, puisqu'on aura $AC^2 = CE \times CE'$, (*Voy.* n°. 329).

80. VII. *Inscrire un triangle* d e f *dans un autre* ABC, c.-à-d., le placer comme DEF, de sorte que d tombe en D sur le côté AC, etc. En supposant le problème résolu, et traçant par les points EFB une circonférence, ainsi que par ADF, on voit que le segment FOE est capable de l'angle donné B, et le segment FOD capable

de l'angle A (208, IV). Décrivons donc sur fe et fd des segmens capables de B et A. La base AB est donnée et forme une double corde dans les deux cercles. Si donc, d'après le problème V, on décrit en f la corde $ab = AB$, il ne restera plus qu'à mener les lignes ad be prolongées en c, et on aura le triangle $abc = ABC$; par conséquent on connoîtra les points D, E, F, puisque $BE = be$, etc. Comme on peut mener la corde ab de deux manières, le problème aura en général deux solutions. 80.

9. *Des Polygones.*

228. On nomme *Polygone* toute figure $ABCDEF$ terminée par des droites. Le *Quadrilatère* a 4 côtés, le *Pentagone* 5, l'*Hexagone* 6, l'*Octogone* 8, le *Décagone* 10, le *Dodécagone* 12, le *Pentédécagone* 15, etc., le nombre des angles est le même que celui des côtés. 81.

Une *Diagonale* est une ligne AD qui traverse le polygone d'un angle à l'autre. 93.

Tous les angles de l'hexagone $ABCD$.... sont *Saillans* (fig. 86); l'angle BAF (fig. 82) est *Rentrant.*

229. Pour construire un polygone dont toutes les parties soient données, après avoir pris sur une droite indéfinie, une longueur AB égale à l'un des côtés, on formera en A et B deux angles BAF, ABC égaux à ceux qu'on sait devoir être adjacens à AB; puis on prendra pour BC et AF les longueurs données, etc. 86.

Après avoir ainsi tracé les côtés FA AB BC CD et DE, le côté FE destiné à fermer l'hexagone est déterminé, ainsi que les angles E et D. Si donc n désigne le nombre des angles d'un polygone, $2n$ sera celui des parties qui le composent, et $2n-3$ celui des quantités suffisantes pour sa construction. Il y a donc des relations qui lient entre elles ces parties, de sorte qu'on puisse

déterminer deux côtés et un angle, d'après la connoissance des autres parties. Ce problème de *Polygonométrie* ne peut maintenant être résolu : mais il est facile d'assigner la relation qui existe entre les angles (*V.* n°. 365, VI).

81. 230. Menons d'un point quelconque O intérieur, les lignes OA OB OC.... elles formeront autant de triangles ABO OBC.... qu'il y a de côtés. La somme de tous les angles est donc deux droits répétés autant de fois qu'il y a de côtés. Mais la somme des angles en O vaut quatre droits. Donc *la somme des angles intérieurs de tout polygone est deux fois autant d'angles droits qu'il y a de côtés, moins quatre angles droits.* Si n est le nombre des côtés, et D l'angle droit, la somme des angles vaut donc $2nD - 4D$ ou $2D(n-2)$.

231. Les quatre angles d'un quadrilatère valent donc
59. quatre droits. Si cette figure a deux de ses côtés parallèles Aa Hh, on la nomme *Trapèze ;* c'est un *Parallélogramme,*
83. si les quatre côtés sont parallèles deux à deux. On sait d'ailleurs (200) que la diagonale BD partage tout parallélogramme en deux triangles égaux ABD BCD; que les angles opposés sont égaux $A = C$, $B = D$; que les côtés opposés sont égaux. Réciproquement si $AB = DC$ et $AD = BC$, la figure $ABCD$ est un parallélogramme. Les diagonales AC BD se coupent mutuellement en deux parties égales, cela résulte de l'égalité des triangles AOD et BOC.

84. Le *Rhombe* ou *Lozange* est un parallélogramme dont les quatre côtés sont égaux. Il est visible que les diagonales AC et BD sont à angle droit, parce que les quatre triangles AOD AOB DOC et BOC sont égaux. Réciproquement si $AO = OC$ et $DO = OB$ la figure $ABCD$ est un parallélogramme, qui devient même un rhombe, lorsque AC et BD sont à angle droit.

85. Enfin, si le parallélogramme $ABCD$ a l'un de ses angles

A droit, l'angle opposé *C* le sera aussi ; il en est de même des autres *B* et *D*, puisque réunis ils valent deux droits, et qu'ils sont égaux ; la figure a donc ses quatre angles droits. C'est pour cela qu'on la nomme *Rectangle*. Les diagonales *AC BD* sont égales. 85.

Si $AB = AD$ le rectangle s'appelle *Carré ;* le carré a donc les quatre côtés égaux et les quatre angles droits.

232. Prolongeons les côtés *AB BC*.... d'un polygone dans le même sens ; nous formerons des angles extérieurs *GAB HBC*...... supplémens des intérieurs adjacens. Mais l'angle *AOB* est supplément des angles $OAB + OBA$: de même, *BOC* l'est de $OBC + OCB$, etc. ; donc la somme des angles en *O* ou quatre droits, est la somme des supplémens des angles *ABC BCD*.... du polygone. Ainsi, *la somme des angles extérieurs de tout polygone vaut quatre droits.* 86.

233. Les polygones qui ont les côtés égaux et les angles égaux sont appelés *Réguliers. On peut toujours inscrire et circonscrire un cercle à un polygone régulier ABCDEF* (*). 87.
En effet, divisons les angles *A* et *B* en deux parties égales ; par les lignes *AO* et *BO*, et du point *O* de concours, menons *OC*. Comme $AB = BC$, le côté *OB* commun et l'angle *ABC* divisé en deux parties égales, le triangle isoscèle $ABO = BOC$, d'où $OA = OC = OB$. On prouvera de même que $OB = OD = OC$, etc.

On voit donc que le point *O* est le centre du cercle circonscrit au polygone ; que les lignes menées de ce centre aux angles sont égales ; qu'elles divisent également ces angles ; qu'elles forment des triangles isoscèles *AOB*

(*) Un cercle qui touche tous les côtés d'un polygone est appelé *inscrit* ; le cercle est *circonscrit* quand il passe par les sommets de tous les angles.

87. *BOC*.... Enfin que les angles *au centre* *AOB BOC*... sont égaux entre eux.

Les cordes *AB BC*... étant à la même distance du centre *O*, les perpendiculaires *OG OI*... sont égales (204) : si donc on décrit du centre *O* avec le rayon *OG* une circonférence, elle touchera tous les côtés du polygone en leur milieu *G*, *I*....

234. Le problème inverse consiste à inscrire ou circonscrire un polygone d'un nombre de côtés déterminé, à une circonférence donnée *ABCD*.... or, il s'en faut de beaucoup qu'on sache résoudre ce problème en général : nous allons exposer les cas dans lesquels on peut en trouver la solution.

88. Avant nous remarquerons que, lorsqu'un polygone est inscrit, il est aisé d'en circonscrire un d'un même nombre de côtés, et réciproquement. En effet, soit *ABC*..... un polygone régulier inscrit donné ; aux points *A B C*.... menons les tangentes *ab bc*.... leur système formera le polygone demandé ; car les triangles *aAB*, *bBC*,.... sont égaux et isoscèles, parce que leurs bases *AB BC*.... sont égales, et que leurs angles adjacens ont la même mesure (207, 4°.).

87. On pourroit aussi mener les tangentes par les milieux *gik*... des arcs *AB BC CD*...; *abcde* formeroit le polygone demandé : car les côtés sont parallèles, par conséquent les angles sont égaux (182) : de plus les triangles égaux *GBO BOI* ont les angles *O* égaux, de sorte que l'angle *GOI* est divisé en deux parties égales. De même le triangle *gOb* étant $\doteq bOi$, *Ob* coupe le même angle *gOi* en parties égales : ainsi les trois points *O B b* sont en ligne droite. Il en est de même de *C* et *c*, de *D* et *d*,.... on a donc $\frac{GB}{gb}=\frac{OB}{Ob}$, ou plutôt $\frac{AB}{ab}=\frac{OB}{Ob}$. On a de même

$\frac{BC}{bc} = \frac{OB}{Ob}$; d'où $ab = bc$, puisque $AB = BC$. Et 87.
ainsi des autres côtés.

Cette double construction seroit assez pénible : il est 87.
préférable de mener une seule ab de ces tangentes, de la conduire jusqu'aux rayons OA OB prolongés, puis de décrire du rayon Oa un cercle sur lequel on porte ab.

Réciproquement si le polygone circonscrit $abcdef$ est donné, on mènera du centre O les lignes aO bO... puis par les points A B... où elles coupent la circonférence, on décrira les cordes AB BC...

235. Puisque la somme des angles au centre est $4D$, 87.
chacun vaut $\frac{4D}{n}$ lorsque le polygone est régulier ; n désignant le nombre de côtés du polygone. L'angle au centre du triangle équilatéral est donc $\frac{4}{3}D$; celui du carré est D, du pentagone régulier $\frac{4}{5}D$, de l'hexagone $\frac{2}{3}D$, du décagone $\frac{2}{5}D$,....

La somme des angles à la circonférence (230) est . . $2D(n-2)$; chacun vaut donc $\frac{2D(n-2)}{n}$. Ainsi l'angle du carré est droit, celui du pentagone régulier est $\frac{6}{5}D$, de l'hexagone $\frac{4}{3}D$, du décagone $\frac{8}{5}D$,...

Chaque côté AB BC.... sous-tend un arc $= \frac{C}{n}$, C désignant la circonférence.

Le nombre des diagonales qu'on peut mener d'un même 93.
angle A à tous les autres est visiblement $n-3$; celui des triangles ainsi formés est $n-2$.

236. Soit FE le côté de l'hexagone régulier inscrit, 89.
l'angle O est $= \frac{2}{3}D$, et les angles égaux E et F du triangle isoscèle OFE valent ensemble $2D - \frac{2}{3}D$ ou $\frac{4}{3}D$: chacun vaut donc $\frac{2}{3}D$, et le triangle OFE est équila-

89. téral, d'où $FE = OF$. *Le côté de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon.*

Si on joint les angles de deux en deux, on aura le triangle BDF équilatéral inscrit : comme $EO = EF =$ le rayon R, $ODEF$ est un rhombe, et les diagonales sont à angle droit (231); ainsi $FI = \sqrt{(FO^2 - IO^2)} = \sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}R^2)}$, puisque $IO = EI = \frac{1}{2}R$; d'où $FD = R\sqrt{3}$. C'est la valeur du côté du triangle équilatéral inscrit.

En divisant en 2, 4, 8... parties égales les arcs AB BC... on aura les polygones inscrits de 12, 24, 48.... 3×2^n côtés.

85. 237. Puisque (235) pour le carré l'angle au centre est droit, pour inscrire un carré dans un cercle $ABCD$, on mènera deux diamètres perpendiculaires AC BD, et on joindra leurs extrémités.

Il est d'ailleurs visible *à posteriori* que la figure $ABCD$ a les quatre angles droits et les côtés égaux. On a $AD^2 = DO^2 + AO^2 = 2R^2$, d'où $AD = R\sqrt{2}$. . . . . Puisque $\frac{AD}{R} = \sqrt{2}$, on voit que *la diagonale du carré est incommensurable avec son côté.*

On sait donc inscrire les polygones de 4, 8, 16... 2^n côtés.

90. 238. Soit AB le côté du décagone régulier inscrit, l'angle O au centre est $\frac{2}{5}D$ (235) ; ainsi, les angles OAB OBA sont doubles de O, puisque chacun vaut $D - \frac{1}{5}D = \frac{4}{5}D$.

Pour trouver le rapport de AB au rayon, divisons l'angle ABO en deux parties égales par la droite CB, les triangles ACB AOB seront semblables, parce que l'angle A est commun, et que $O = ABC$: le triangle ACB sera donc isoscèle; ainsi, $AB = CB$ et $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AO}$. Mais d'une autre part, le triangle COB a aussi deux angles égaux à $\frac{2}{5}D$, d'où $OC = CB = AB$; ainsi AB, ou son égal CO, est moyen proportionnel entre AO et AC.

En divisant le rayon en moyenne et extrême raison, la plus grande partie sera le côté du décagone régulier inscrit (227, VI). $AB = BF$ donne AF pour le côté du pentagone régulier inscrit. On pourra aussi inscrire les polygones réguliers de 20, 40.... 5×2^n côtés; et, comme les côtés de l'hexagone et du décagone sous-tendent des arcs qui sont le 6ᵉ. et le 10ᵉ. de la circonférence C, la différence de ces arcs, ou $\frac{C}{6} - \frac{C}{10} = \frac{C}{15}$, donnera le côté du polygone régulier de 15 côtés, et de là ceux de 30, 60 .... 15×2^n. 90.

239. Tels sont les polygones réguliers qu'on sait inscrire; quant aux autres, on se contente, faute de mieux, de diviser, en tâtonnant, la circonférence en un nombre convenable de parties égales. On résout aussi le problême à l'aide du compas de proportion et du rapporteur (*voyez* l'Encyclopédie); mais comme ces instrumens sont eux-mêmes construits mécaniquement, on ne peut regarder ces procédés comme exacts. La division de la circonférence en parties égales est sur-tout importante dans la confection des intrumens (*voyez* la *Géom. du Compas*, par *Mascheroni*, et *les Recherches arith. de Gauss*, pag. 462). Comme la *trisection de l'angle* completteroit cette opération (208, III), on s'est longtems, mais en vain, efforcé de trouver la solution de cette question. Elle est maintenant démontrée impossible par le secours de la règle et du compas seuls (463, 1).

240. Nous terminerons par exposer quelques propriétés des quadrilatères inscriptibles au cercle.

I. On a dans le quadrilatère $ABCO$, $A + C = 2$ droits, puisque les angles A et C embrassent la circonférence entière (207); de même $B + O = 2D$. Ainsi, *dans tout quadrilatère inscriptible au cercle, les angles opposés sont* 91.

91. *supplémens l'un de l'autre.* La réciproque est vraie, car, en faisant passer une circonférence par C, O et A, si le quatrième sommet étoit en B', l'angle B' n'auroit pas pour mesure $\frac{1}{2}$ COA, et on n'auroit pas (208). . . . . . $O + B' = 2$ droits.

85. II. *On peut toujours circonscrire un cercle à tout rectangle ADCB* : les diagonales BD AC sont des diamètres.

92. III. Formons l'angle $KCD = BCA$; comme les angles BAC et KDC sont égaux (207), les triangles KCD et BAC sont semblables : de plus l'angle $ACD = BCK$ et l'angle $CAD = CBK$, les triangles CBK et CAD sont aussi semblables. On tire de ces similitudes

$$\frac{KD}{CD} = \frac{AB}{AC} \text{ et } \frac{BK}{BC} = \frac{AD}{AC};$$

d'où $KD \times AC = AB \times CD$ et $BK \times AC = BC \times AD$:

ajoutant ces équations, comme $BK + KD = BD$, on a

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Donc, *dans tout quadrilatère inscrit au cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

83. IV. Si des points A et B, on abaisse sur la base DC du parallélogramme $ABCD$ les perpendiculaires AE BF, les triangles ADC BDC donneront (218)

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \times DE,$$
$$BD^2 = BC^2 + DC^2 + 2DC \times CF.$$

Ajoutant ces équations, comme $DE = CF$ et $AB = DC$, on a $BD^2 + AC^2 = AD^2 + BC^2 + DC^2 + AB^2$; Ainsi *dans tout parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.* La proposition est d'ailleurs évidente pour un rectangle (217, 4°.).

10. *Des Figures semblables et de la Circonférence.*

241. On dit que deux polygones $ABCDEF$ $abcdef$ sont *semblables, lorsqu'ils sont formés de triangles* T *et* t, T' *et* t', T'' *et* t''. . ., *respectivement semblables et disposés dans le même ordre.* 93.

Sur une droite donnée ab, homologue à AB, il est aisé de décrire un polygone semblable à $ABCD$.......... On fera d'abord t semblable à T, ce qui ne présente aucune difficulté (214); puis t' semblable à T', sur ac homologue à AC, etc.

242. Les triangles semblables T et t ont les angles B et b égaux, ainsi que BCA et bca; de plus (211) $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{AC}{ac}$. De même T' et t' ont l'angle $ACD=acd$, d'où on voit que l'angle $BCD=bcd$: en outre $\frac{AC}{ac}=\frac{DC}{dc}$. On prouveroit de même, à l'aide de T'' et t'' que l'angle $CDE=cde$ et que $\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}$, etc. *Les polygones semblables ont donc les angles égaux et les côtés homologues proportionnels.*

Réciproquement si les polygones ont les angles respectivement égaux, et si de plus $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=$etc., les polygones sont semblables; car $B=b$, et les côtés qui comprennent ces angles sont proportionnels, par hypothèse, d'où il suit (215) que T et t sont semblables, et de plus $\frac{BC}{bc}=\frac{AC}{ac}$, et l'angle $BCA=bca$. Retranchant ces angles de $BCD=bcd$, il reste l'angle $ACD=acd$; et comme on suppose que $\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}$;

93. on a $\frac{AC}{ac}=\frac{CD}{cd}$, à cause du rapport commun $\frac{AC}{ac}$, ce qui prouve que T' est semblable à t', et ainsi de suite.

1°. Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont donc des figures semblables, puisque leurs angles sont respectivement égaux, ainsi que leurs côtés (233).

94. 2°. Soient deux polygones semblables ABC.... et abc..... Si on prend deux côtés homologues quelconques ED ed, et, si de leurs extrémités, on mène des diagonales à tous les autres angles, on formera des triangles respectivement semblables; EDF à edf; EDA à eda; EDB à edb, etc.... ; car, les angles des polygones étant égaux, et les côtés homologues proportionnels, on pourra raisonner ici comme ci-dessus.

3°. *Lever un plan*, n'est autre chose que construire des polygones semblables à ceux que forment sur le terrain les points dont la situation respective est connue. Pour cela, on conçoit ces points liés entre eux par des triangles, dont on mesure sur le terrain un nombre suffisant de parties ; puis on décrit ensuite sur le papier d'autres triangles semblables à ceux-ci, d'après les procédés connus (214, etc.)

94. 243. Soient pris sur BC et bc des points H et h, tels qu'on ait $\frac{Hc}{hc}=\frac{CB}{cb}$, et menons HE et he. Les triangles HCE hce seront semblables (215), puisque l'angle $HCE=hce$, et que $\frac{HC}{hc}=\frac{CE}{ce}$. Il s'ensuit que l'angle $EHC=ehc$ et $\frac{EH}{eh}=\frac{HC}{hc}=\frac{BC}{bc}$. Si donc on mène de deux angles homologues de polygones semblables, des droites HE et he qui coupent proportionnellement les

côtés BC et bc, elles feront des angles égaux avec ces côtés, et leur seront proportionnelles. La réciproque se démontre aisément. 94.

Maintenant, en considérant les polygones semblables $ABHEF$ $abhef$, si les points G et g coupent les côtés FE et fe, proportionnellement la ligne GH jouira de la même propriété que HE. Donc, *si dans deux polygones semblables* ABC.... abc...., *on mène deux droites* GH *et* gh *qui coupent proportionnellement deux côtés, les longueurs* GH *et* gh *leur seront aussi proportionnelles, et feront des angles égaux avec* FE *et* fe, *ainsi qu'avec* BC *et* bc.

244. D'un point quelconque O pris dans l'intérieur du polygone ABC....., menons des lignes aux sommets ABC... prenons sur ces lignes OA, OB... des longueurs qui leur soient proportionnelles, c'est-à-dire, telles qu'on ait $\frac{OA}{Oa}=\frac{OB}{Ob}=\frac{OC}{Oc}=$..... Les triangles OAB oab seront semblables, et AB parallèle à ab. En raisonnant de même pour OBC, obc, etc., on verra que les polygones ABC... abc... ont les côtés parallèles et proportionnels, et, par conséquent, sont semblables. 95.

De même sur les lignes OA Oa, si on prend des parties OK ok proportionnelles aux côtés AE ae; puis OF of proportionnelles à AB ab, etc., les polygones KFG.... kfg.... seront semblables, comme formés de triangles OKI oki, OKF okf..., respectivement semblables.

245. Puisqu'on a $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\ldots\ldots$ le théorème (73, 3°.) donne 93.

$$\frac{AB+BC+CD+\ldots}{ab+bc+cd+\ldots}\;\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\ldots$$

Ainsi *les périmètres des polygones semblables sont entre eux comme leurs lignes homologues.*

96. En appliquant ceci aux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, on aura $\frac{ABCD\ldots}{abcd\ldots} = \frac{AB}{ab}$, ou $= \frac{OB}{Ob}$, ou $= \frac{OI}{Oi}$, parce que les triangles OBI Obi sont semblables, comme ayant les angles au centre égaux (235); ainsi, *les périmètres des polygones réguliers semblables, sont entre eux comme les rayons des cercles inscrits et circonscrits.*

97. 246. Chaque côté AB d'un polygone régulier étant plus court que l'arc ACB qu'il sous-tend, on voit que la circonférence *rectifiée* est plus longue que le périmètre de tout polygone inscrit. De plus C étant le milieu de l'arc BCA, on a la corde $AB < AC + CB$, ce qui fait voir qu'en doublant le nombre des côtés d'un polygone inscrit, le périmètre approche de plus en plus de la circonférence, sans cesser d'être plus petit qu'elle.

D'un autre côté, l'arc $CAL < CE + EL$ (160), donne de même le périmètre de tout polygone circonscrit plus grand que la circonférence; la tangente AK est le demi-côté du polygone circonscrit d'un nombre double de côtés (234); et comme la perpendiculaire KA est $< KE$, on a $AK + KC < EC$; en doublant le nombre des côtés d'un polygone circonscrit, le périmètre approche davantage de la longueur de la circonférence, sans cesser d'être plus grand qu'elle.

·7. P et p étant les périmètres de polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit; et R et r les rayons OC OI des cercles inscrits, on a (245), $\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$, d'où (73,1°.) $P - p = \frac{P}{R}(R - r)$. Or P diminue en s'approchant de la circonférence $LCB\ldots$,

R est constant et $R - r$ ou CI décroît indéfiniment, lors- 97.
qu'on double successivement les nombres de côtés des polygones P et p, (205) : ce qui prouve que la différence $P - p$ entre leurs périmètres approche autant qu'on veut de zéro, c.-à-d., que ces périmètres approchent indéfiniment de la circonférence, qui est toujours comprise entre eux, sans jamais lui être rigoureusement égaux : donc *la circonférence est la limite des polygones réguliers inscrits et circonscrits* (167).

247. Cela posé, désignons par C et c les circonfé- 96.
rences dont les rayons sont $BO = R$, $bO = r$; par P et p deux polygones réguliers inscrits $ABC....$ $abc....$ semblables, enfin par Z et z la différence entre chaque périmètre et la circonférence circonscrite, ou $C - P = Z$, $c - p = z$. On en tire

$$\frac{P}{p} \text{ ou } \frac{R}{r} = \frac{C-Z}{c-z}, \text{ d'où } Rc - Rz = rC - rZ\,;$$

or Rc et rC restent constans, Z et z varient avec le nombre des côtés, et peuvent devenir aussi petits qu'on voudra ; donc (167)

$$Rc = rC \quad \text{ou} \quad \frac{C}{c} = \frac{R}{r} = \frac{2R}{2r}\,;$$

les circonférences sont entre elles comme leurs rayons ou comme leurs diamètres. On a aussi $Rz = rZ$ (167), quels que soient les polygones.

248. Concevons nos circonférences rectifiées ; chacune contiendra son diamètre le même nombre de fois ; si on connoissoit ce nombre π ou $\frac{C}{2R}$, on auroit donc pour la longueur de la circonférence

$$C = 2\pi R\,;$$

96. il suffit donc de déterminer π ; nous trouverons bientôt (320,581), cette quantité $= 3,14159265...$ Si on suppose $R = \frac{1}{2}$ ou $R = 1$, il vient $\pi = C$ ou $\pi = \frac{1}{2} C$; π, ou le rapport de toute circonférence à son diamètre, est donc aussi la circonférence qui a l'unité pour diamètre, ou la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon. L'équation $C = 2\pi R$ sert aussi à trouver le rayon d'une circonférence dont la longueur est donnée, $R = \frac{C}{2\pi} = 0,159155\ C$.

CHAPITRE II.

DES SURFACES.

1. *Des Aires des polygones et du Cercle.*

249. UNE *Aire* est l'étendue comprise entre les lignes qui terminent une figure. Les aires *Equivalentes* sont celles qui sont d'égale étendue sans qu'elles puissent coïncider par la superposition.

98. Deux rectangles *AEFD aefd* sont égaux lorsque leurs bases sont égales ainsi que leurs hauteurs, ou $AD = ad$ et $AE = ae$. Mais si on compare le parallélogramme *ABCD*, au rectangle *AEFD*, on les trouvera simplement équivalens, parce que le triangle $AEB = DFC$.

Les parallélogrammes *ABCD abcd*, qui ont des bases égales et des hauteurs égales, sont donc équivalens, puisqu'ils équivalent aux rectangles égaux *ADFE adfe*.

107. Soit un triangle *ABC*; menons *CD* et *BD* parallèles

à AB et AC; les deux triangles ACB BCD sont égaux : ainsi, *tout triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.* De sorte que tous les triangles ACB, AEB, AFB..... qui ont même base AB et leurs sommets sur CF parallèle à AB sont égaux. 107.

250. Comparons maintenant deux parallélogrammes quelconques.

1°. Soient d'abord deux rectangles $ABCD=R$, $abcd=r$, dont les bases AB et ab sont égales : si les hauteurs $AD=H$ et $ad=h$ sont commensurables, il y aura une longueur ax contenue m fois dans H, et n fois dans h, et on aura (156), $\frac{H}{h}=\frac{m}{n}$. En menant par les points de division x x' y y'... des parallèles aux bases, les rectangles R et r seront partagés, l'un en m, l'autre en n rectangles égaux, et on aura $\frac{R}{r}=\frac{m}{n}$; d'où $\frac{R}{r}=\frac{H}{h}$. Ainsi *les rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.* 99.

Si les hauteurs sont incommensurables, partageons de même AD en parties égales Ax' $x'y'$.... et portons-les sur ad en ax, xy.... soit i le point de division le plus voisin de d; en menant il parallèle à dc, on aura . . . $\frac{al}{R}=\frac{ai}{H}$, ou $\frac{r}{R}+\frac{dl}{R}=\frac{h}{H}+\frac{id}{H}$: Donc on a encore $\frac{r}{R}=\frac{h}{H}$, puisque dl et id sont aussi petits qu'on veut, et que r, R, h, H sont constans (167).

2°. Si les rectangles $ABCD$ $abcd$ ont en outre les bases inégales, $AB=B$, $ab=b$; on les portera l'un sur l'autre en faisant coïncider l'un de leurs angles droits, ce qui déterminera les rectangles $AK=r$ et $AH=R'$. Or, R' a même hauteur AI que AK, et même base AB que AC: on a donc 100.

100. $\frac{R}{R'} = \frac{H}{h}, \quad \frac{R'}{r} = \frac{B}{b} \quad$ d'où $\frac{R}{r} = \frac{BH}{bh}$;

ainsi *les rectangles sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.*

3°. Les mêmes théorêmes ont également lieu pour les parallélogrammes, puisqu'ils sont équivalens aux rectangles de même base et de même hauteur. Donc *les parallélogrammes sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.*

101. 251. Mesurer une aire, c'est chercher le nombre de fois qu'elle contient une autre aire donnée. Prenons pour unité de surface le rectangle *abcd*, pour mesurer le rectangle $ABCD$; puisque $\frac{R}{r} = \frac{B}{b} \times \frac{H}{h}$, on portera la base *ab* sur AB, afin de savoir combien l'une est contenue dans l'autre; on en dira autant des hauteurs *ad* sur AD; ensuite on multipliera ces nombres de fois, c'est ainsi que dans notre figure 3×4 ou 12 exprime que R contient 12 fois r.

100. Comme les bases et les hauteurs pourroient ne pas se contenir exactement, on dit plus généralement que la mesure d'une aire $ABCD$ est son rapport avec une autre *abcd* prise pour unité; cette mesure est le produit du rapport $\frac{B}{b}$ des bases par celui $\frac{H}{h}$ des hauteurs. Il en est de même de tout parallélogramme.

101. Si on prend pour unité d'aire le carré *abcd* dont le côté est l'unité linéaire, on a $b=h=1$, d'où $R=BH$. Ainsi, *l'aire d'un parallélogramme est le produit des nombres de fois que l'unité linéaire est contenue dans sa base et dans sa hauteur :* ce qu'on exprime d'une manière abrégée, quoiqu'incorrecte, en disant que *l'aire d'un parallélogramme est le produit de sa base par sa hauteur.*

La mesure de l'aire *ABCD* du rectangle qui a ses côtés égaux est BC^2; l'aire du carré est donc la seconde puissance de son côté. C'est pour cela que les mots carré et seconde puissance sont synonymes. 85.

252. Tout ce qui a été dit précédemment du produit des lignes évaluées en nombres, doit se dire aussi des rectangles qui ont les facteurs pour côtés. Par exemple, la proposition (225) peut s'énoncer ainsi : *le carré construit sur la tangente est égal au rectangle qui a pour base la sécante entière et pour hauteur sa partie extérieure :* et ainsi des autres.

Le caractère essentiel des démonstrations géométriques est de réunir la rigueur du raisonnement à une clarté comparable à celle des axiomes. On ne doit jamais y perdre de vue les objets comparés : ainsi quoique ces théorèmes soient la conséquence des principes précédens, cependant comme celui des lignes proportionnelles n'est pas le seul qui ait servi à les obtenir, nous donnerons ici une démonstration directe des deux propositions fondamentales, relatives au rapport des aires. Les autres en dérivent ensuite sans effort, ainsi qu'on peut s'en convaincre en les reprenant tour-à-tour.

253. I. Construisons sur la ligne $AC=AB+BC$ les carrés *AF* et *AI*: il est visible que $AI=AF+FI+EH+CF$, ou $=AF+FI+2\,CF$, parce que les rectangles *EH* et *CF* sont égaux, comme ayant *AB* pour base et *BC* pour hauteur. Comme *AF* est le carré de *AB*, *FI* celui de *BC*, on retrouve ainsi la proposition $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$. Seulement ici a et b sont des lignes et a^2, b^2, ab des aires. 102.

Pareillement $AF=AI+FI-2EI$ à cause de $BD=BI-FI$ et de $EI=BI$: on retrouve donc aussi 102.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

103. 254. II. Soit le triangle quelconque ABC; formons les carrés BF CE BG; menons des angles B et C les perpendiculaires BK et CL sur les côtés opposés; enfin, tirons CF et BE. Les triangles BAE CAF sont égaux; car leur angle en A se compose de l'angle BAC augmenté de l'angle droit CAE ou BAF; de plus les côtés adjacens sont ceux des carrés BF CE: enfin le triangle BAE est moitié du rectangle IE (249); de même CAF est moitié de AL, donc $IE=AL$, ou plutôt $AL=CE-CK$. On auroit de même $BL=BG-GO$.

Cela posé, 1°. si l'angle BCA est aigu les triangles rectangles CBI COA sont semblables, et on a $\frac{CI}{CO}=\frac{BC}{CA}$, d'où *Rect.* $CK=GO$: ajoutant nos deux équations, nous trouverons $AL+BL$ ou $BF=CE+BG-2\,CK$, ce qui revient à $c^2=b^2+a^2-2b\times CI$, comme précédemment (218).

104. 2°. Si l'angle BCA est droit, BI et AO se confondent avec BC et CA; on a donc $AL=EC$, $BL=BG$ et ajoutant, $FB=EC+BG$; ou *le carré construit sur l'hypothénuse égal à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit* (*).

Les rectangles AL et BF de même hauteur sont entre

105. (*) Formons sur les côtés AC BC AB des parallélogrammes quelconques CE BG BF, tels qu'en prolongeant en O les côtés de CE et BG, et menant OC, on ait $OC=Dl$; on aura $BF=CE+BG$. En effet, les parallélogrammes $DAfl$, $CAHO$, sont égaux comme ayant des bases et des hauteurs égales; par la même raison $DAFL=DAfl$, $CE=CAHO$; donc $CE=DAFL$; on aura de même $BG=BL$. Donc $BF=CE+BG$.

104. Si le triangle BAC est rectangle, et si BG CE BF sont des carrés, on verra aisément que la proposition ci-dessus rentre dans cette dernière dont on a ainsi une autre démonstration.

eux comme AD et AB : ainsi $\frac{CE}{BF} = \frac{AD}{AB}$; on a encore 104.
$\frac{BG}{BF} = \frac{BD}{BA}$, et $\frac{CE}{BG} = \frac{AD}{BD}$. Ces propositions reviennent à celles du n°. (217, 2°. et 3°.)

3°. Enfin, si l'angle BCA est obtus, la même construction 106.
que pour le 1er. cas donne encore le triangle $BAE=CAF$, d'où $AK=AL$, ou $AL=CE+CK$: on trouvera de même $BL=BG+CK$; ajoutant, il vient $BF=CE+BG+2\,CK$ ou $c^2=b^2+a^2+2b \times CI$, comme n°. 218.

255. Lorsqu'un carré dont x est le côté, est équivalent à un parallélogramme dont B et H sont la base et la hauteur, on a $x^2=BH$, on voit donc que *le côté du carré équivalent à un parallélogramme est moyen proportionnel entre sa base et sa hauteur*, et qu'il est facile d'avoir la *Quadrature* de tout parallélogramme (222).

256. *L'aire du triangle est la moitié du produit de sa* 107.
base par sa hauteur, d'après ce qu'on a dit (249).

1°. Le carré équivalent à un triangle donné est $x^2=\frac{1}{2}BH$, on a donc la quadrature de cette figure, en cherchant une moyenne proportionnelle entre la hauteur et la moitié de la base (222).

2°. Les triangles ABF BFC qui ont même hauteur 112.
sont entre eux comme leurs bases AF FC. Pour couper par une ligne BF un triangle ABC en deux parties, qui aient entre elles un rapport donné, il suffit de partager la base AC en deux segmens qui soient dans ce rapport.

257. Soit un polygone $ABDE$..... menons AD et sa 108.
parallèle BC qui rencontre en C le côté ED prolongé ; enfin, tirons AC. Le triangle ABD peut être remplacé par ACD qui lui est égal; ainsi, l'hexagone $ABDEFG$ est équivalent au pentagone $ACEFG$.

108. En appliquant de nouveau cette construction à ce pentagone, on le changera en un quadrilatère et enfin en un triangle, et ensuite, si on veut, en un carré. *On sait donc réduire tout polygone à un triangle ou à un carré équivalent.*

258. L'aire d'un polygone s'obtient en le décomposant en triangles et cherchant l'aire de chacun ; mais si le po-
87. lygone est régulier, comme $ABCD...$, n étant l'un des côtés, on prendra n fois l'aire AOB d'un des triangles au centre : de sorte que $n \times AB \times \frac{1}{2} OG$ est l'*aire du polygone*, qui par conséquent *égale son périmètre multiplié par le rayon du cercle inscrit*, qu'on nomme aussi *Apothême;*

259. Soit le trapèze $AHha$; menons AC parallèle à ah ;
59. puis Ee par les milieux de AH et ah ; Ee sera parallèle à Hh et $= \frac{1}{2}(Aa + Hh)$, (216,5°.). Or l'aire du parallélogramme Ah est le produit de sa hauteur par Ch ou Be : celle du triangle AHC est le produit de cette même hauteur par $\frac{1}{2} HC$ ou EB; ainsi, l'aire $AHha$ est le produit de la hauteur commune par Ee ou $\frac{1}{2}(Aa + Hh)$. Donc *l'aire du trapèze est le produit de sa hauteur par la moitié de la somme de ses bases parallèles, ou par la ligne menée à distance égale de chacune.*

87. 260. L'aire du trapèze $ABba = \frac{1}{2} Gg \times (AB + ab)$; en multipliant AB et ab par le nombre des côtés des polygones réguliers $ABCD....\ abcd....$, on obtient leurs périmètres P et p : ainsi , la différence de leurs aires est $= \frac{1}{2} Gg(P+p)$. Comme Gg tend sans cesse vers zéro, lorsqu'on fait croître le nombre des côtés, et que P et p approchent de plus en plus de la circonférence, cette différence peut être rendue aussi petite qu'on veut. Ainsi, *l'aire du cercle est la limite des aires des polygones réguliers inscrits et circonscrits* (167).

Cela posé, soient C l'aire d'un cercle de rayon R,

α l'excès de l'aire du polygone circonscrit sur celle du cercle, 87.
p la circonférence, et β sa différence avec le périmètre du polygone, l'aire de ce polygone ou $C+\alpha$, est (258) donc $=\frac{1}{2}R(p+\beta)$, comme les variables α et β décroissent indéfiniment (*), on comparera les termes constans (167), et on aura

$$\text{Cercle } C=\tfrac{1}{2}pR=\pi R^2.$$

à cause (248) de $p=2\pi R$. Donc *l'aire du cercle est le produit de la moitié du rayon par la circonférence, ou du carré du rayon par le rapport du diamètre à la circonférence.* Lorsque l'aire C du cercle est donnée, le rayon

$$R=\sqrt{\frac{C}{\pi}}=0{,}56419\times\sqrt{C}.$$

Un rectangle qui a pour base la demi-circonférence rectifiée et pour hauteur le rayon, est égal au cercle ; on a ainsi la solution approchée du fameux problème de la *quadrature du cercle.* Pour le résoudre rigoureusement, chose à-peu-près inutile, il faudroit trouver la valeur exacte de π.

261. Quant à l'aire du *Secteur* AOBI, comme on a (168) 109.
$\frac{AOBI}{AODI}=\frac{AIB}{AID}$, le quart de cercle $AODI=\frac{1}{4}\pi R^2$ et $AID=\frac{1}{2}\pi R$, on trouve $AOBI=\frac{1}{2}R\times AIB$; *l'aire du*

(*) Observons qu'on auroit été conduit au même résultat, si, raisonnant d'une manière analogue, mais inexacte, on eût négligé les termes α et β, qui doivent disparoître ensuite : c'est ce qui arrive dans la méthode des *infiniment petits*, où on considère la circonférence comme un polygone régulier d'une infinité de côtés ; car alors C est l'aire et p le périmètre de ce polygone, et on trouve $C=\frac{1}{2}pR$. Ce procédé pourroit donc être regardé comme parfaitement rigoureux si on s'assuroit *à priori* que les termes ainsi négligés sont indéfiniment petits. Consultez, à ce sujet, *les Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, par Carnot.

109. *secteur est donc le produit de la moitié du rayon par la longueur de l'arc;* longueur connue, puisqu'on suppose donné le rapport de l'arc à la circonférence : si n est le nombre de fois que l'arc AIB est contenu dans la circonférence, on a $AIB = \frac{2\pi R}{n}$, d'où $AOBI = \frac{\pi R^2}{n}$.

L'aire du segment $ALBI$ est égale à celle du secteur moins le triangle $AOBL$.

142. Aux arcs semblables et concentriques ABD abd circonscrivons des portions de polygones réguliers ; le système de ces trapèzes formera une aire dont la limite sera $ABDabd$. Il est aisé d'en conclure que l'aire $ABDabd$ comprise entre deux arcs concentriques, est égale au produit de la distance Aa entre ces arcs, multipliée par la moitié de leur somme, ou par l'arc $a'b'd'$ décrit à distance égale de l'un et de l'autre (259).

2. *Comparaison des Surfaces.*

110. 262. Comparons les aires des polygones semblables.

I. Soient deux triangles ABC abc; leur similitude donne $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$: mais les perpendiculaires BD et bd forment les triangles semblables ABD abd ; d'où $\frac{AB}{ab} = \frac{BD}{bd}$: donc $\frac{AC}{ac} = \frac{BD}{bd}$, (ce qui est conforme au théorème 243). Multipliant les deux membres par $\frac{BD}{bd}$, on trouve que $\frac{AC \times BD}{ac \times bd} = \frac{BD^2}{bd^2} = \frac{AB^2}{ab^2} = \ldots$ Donc *les aires des triangles semblables sont entre elles comme les carrés de leurs lignes homologues*, puisque $ABC = \frac{1}{2} AC \times BD$ et $abc = \frac{1}{2} ac \times bd$.

93. II. Soient deux polygones semblables $ABCD....abcd....$ (241) ; la similitude des triangles ABC abc donne . .

$\frac{T}{t} = \frac{AB^2}{ab^2}$: on a de même $\frac{T'}{t'} = \frac{AC^2}{ac^2} = \frac{AB^2}{ab^2}$, etc.; 93.
réunissant ces rapports égaux, il vient

$$\frac{T}{t} = \frac{T'}{t'} = \frac{T''}{t''} = \ldots$$

d'où (73, 3°.) $\frac{T + T' + T'' \ldots}{t + t' + t'' \ldots} = \frac{T}{t}$,

ou $\frac{ABCD\ldots}{abcd\ldots} = \frac{AB^2}{ab^2}$.

Les aires des polygones semblables sont entre elles comme les carrés de leurs lignes homologues.

263. Concluons de là que 1°. si on construit trois polygones $M N$ et P semblables, dont les côtés homologues soient ceux d'un triangle rectangle ABC, on aura $\frac{M}{AB^2} = \frac{N}{BC^2} = \frac{P}{AC^2}$, 111.
d'où $\frac{M}{AB^2} = \frac{N + P}{BC^2 + AC^2}$: or $AB^2 = BC^2 + AC^2$; donc $M = N + P$. Cette proposition étend celle du carré de l'hypothénuse (254, 2°.), à tous les polygones semblables; de sorte qu'on peut aisément construire une figure égale à la différence de deux autres, ou à leur somme ou à la somme de tant d'autres qu'on voudra, pourvu qu'elles soient toutes semblables.

2°. Les aires des polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont comme les carrés des rayons des cercles inscrits et circonscrits.

3°. Soient deux cercles C et c, R et r leurs rayons, α et β les excès des aires des polygones inscrits sur celles des cercles C, c; $C - \alpha$ $c - \beta$ seront les aires des polygones; d'où $\frac{C - \alpha}{c - \beta} = \frac{R^2}{r^2}$; puis (167) $\frac{C}{c} = \frac{R^2}{r^2}$.

Cela résulteroit aussi de ce que $C = \pi R^2$, $c = \pi r^2$, d'où

$$\frac{C}{c} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{(2R)^2}{(2r)^2};$$

donc *les cercles sont entre eux commes les carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

4°. Le cercle qui a pour diamètre l'hypothénuse d'un triangle rectangle est donc égal à la somme de ceux qui ont pour diamètres les côtés de l'angle droit; de sorte qu'il est facile de former un cercle égal à la somme ou à la différence de tant de cercles qu'on voudra.

110. 264. Soient ABC abc deux triangles qui ont un angle égal $A = a$; les perpendiculaires BD bd sur leurs bases donnent (256), $\frac{ABC}{abc} = \frac{BD \times AC}{bd \times ac}$: or les triangles semblables ABD abd donnent $\frac{BD}{bd} = \frac{AB}{ab}$; donc . . . $\frac{ABC}{abc} = \frac{AB \times AC}{ab \times ac}$. Ainsi *deux triangles qui ont un angle égal sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle.* On peut, à l'aide de ce théorême, résoudre les questions suivantes.

112. I. Diviser un triangle ABC en trois parties égales, par des droites DF FE qui se joignent en un point donné F sur la base AC. Divisons-la en trois également aux points H et I; comme le triangle CBI est le tiers de CBA (256), l'aire inconnue $CDF = CBI$: or on a $\frac{CDF}{CBI} = \frac{CD \times CF}{CB \times CI}$, donc $CD \times CF = CB \times CI$ ou $\frac{CD}{CB} = \frac{CI}{CF}$, ce qui prouve (212) que DI est parallèle à BF; et que, par conséquent, il faut mener BF, puis ses parallèles HE DI, et enfin DF FE.

113. II. La même construction sert à diviser l'aire ABC en 4, 5, ... parties égales par des lignes FE FE' FD' FD;

il faut couper la base AB en autant de parties égales. Ce genre de problème trouve son application lorsqu'on veut diviser l'héritage ABC en parts égales par des sentiers qui aboutissent à un puits commun. Consultez le *Traité de Topographie* de Puissant, p. 199. 113.

III. Former un triangle EIK équivalent au triangle ABC, qui ait sa base EI donnée ainsi que la ligne NK qui contient le sommet K. Soit $GEH = ABC$; prenons $AF = GH$ et DE parallèle à AH, D étant sur le prolongement de AB; le triangle $ADF = EGH$, (256). Si donc on connoissoit un point F, tel que triangle ADF fût $= ABC$, on prendroit $GI = AF$ et GEH seroit $= ABC$. Or, on a 114.

$$\frac{ABC}{ADF} = \frac{AB \times AC}{AD \times AF},$$

d'où $$AB \times AC = AD \times AF;$$

ainsi BF est parallèle à DC (212).

En transformant de même le triangle EGH en un autre EIL équivalent, qui auroit un de ses sommets en I, on auroit changé le triangle ABC en EIL, le côté EI et l'angle IEL étant donnés. Enfin, LK parallèle à EI coupe la droite donnée NK au point K, et le triangle EIK a son sommet K sur une ligne NK donnée de position, ainsi que sa base EI. On pourroit déterminer le point K en se donnant la longueur IK, ou l'angle K (208, V) ou toute autre autre condition.

3. *Des Plans et des Angles dièdres.*

265. De la définition du *Plan* (154), il suit que 1°. le plan est une surface indéfinie en longueur et largeur.

2°. *Trois points ou deux droites qui se croisent sont toujours dans un même plan, dont elles déterminent la position.* En effet, on peut visiblement concevoir une infinité de plans qui passent par l'une des droites données,

114. ou par la ligne qui joint deux des points donnés ; puisqu'on peut faire tourner l'un de ces plans autour de cette ligne, comme sur une charnière. Mais ce plan s'arrêtera dans son mouvement, si on fixe hors de la ligne un point par lequel il doive passer.

3°. Un triangle est toujours dans un plan.

4°. Deux parallèles déterminent un plan.

5°. Deux plans ne peuvent, sans se confondre, avoir trois points communs non en ligne droite : ainsi *l'intersection de deux plans est une droite.*

115. 266. Faisons tourner l'angle droit PAB autour de AB, jusqu'à ce que AP fasse avec une troisième ligne AC un angle droit PAC, on dit alors que AP est perpendiculaire au plan des deux droites AB AC.

Soit menée une ligne quelconque AI dans ce plan ABC ; évaluons l'angle PAI. Pour cela, joignons les trois points P C B quelconques, mais tels néanmoins que $AB = BC$. Les lignes PB PC seront égales, à cause du triangle $PAC = PAB$.

Les lignes PO AO, menées au milieu O de la base BC des triangles isoscèles PBC ABC sont perpendiculaires sur cette base (201,3°.) ; les triangles rectangles PCO ACO PAC donnent

$$PO^2 = PC^2 - CO^2,\ AC^2 = CO^2 + AO^2,\ PC^2 = AP^2 + AC^2;$$

en ajoutant, il vient $PO^2 = AP^2 + AO^2$; ce qui prouve que le triangle APO est rectangle.

Les triangles rectangles POI AOI APO donnent

$$PI^2 = PO^2 + OI^2,\ AO^2 = AI^2 - OI^2,\ PO^2 = AP^2 + AO^2;$$

ajoutant, on trouve $PI^2 = AI^2 + AP^2$; ainsi l'angle PAI est droit.

On conclut de là que, 1° : *si une droite* AP *est perpendiculaire à deux autres* AB AC *qui se croisent en* A,

elle le sera aussi à toute ligne AI, *tracée par ce point* 115.
dans le plan BAC *des deux dernières.*

2°. Soit une droite *BC* dans un plan, auquel la ligne *AP* est perpendiculaire; si du pied *A* de celle-ci, on abaisse *AO* perpendiculaire sur *BC*, et qu'on joigne le point *O* à un point quelconque *P* de *AP*, la ligne *PO*, et par conséquent le plan *PAO*, seront perpendiculaires sur *BC*. Il suffit pour s'en convaincre de prendre $OC = OB$, de mener *AC* et *AB*, et de reprendre la démonstration ci-dessus.

3°. *Les obliques* PC PB *qui s'écartent également de la perpendiculaire sont égales.* Cela résulte des triangles égaux *PAC PAB*.

4°. Si on fait tourner un triangle *PAB*, rectangle 116.
en *A*, autour du côté *AP*, la ligne *AB* décrira le plan *MN* perpendiculaire à *AP*; les pieds *B E C D*..... des obliques égales *PB PE*..... seront sur une circonférence dont le centre est au point *A*.

Pour abaisser d'un point *P* hors d'un plan *MN* une perpendiculaire sur ce plan, on marquera trois points de ce plan à égale distance de *P*; le centre du cercle décrit par ces trois points, sera le pied *A* de la perpendiculaire.

5°. *D'un point* A *ou* P, *pris sur un plan ou hors d'un* 115.
plan BAC, *on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à ce plan; cette ligne* AP *est la plus courte distance du point au plan; les obliques qui s'écartent le plus, sont les plus longues.* Cela résulte de ce qu'on peut ramener ces diverses lignes à être situées dans un même plan (176).

6°. *Par un point, on peut toujours mener un plan* 116.
perpendiculaire à une droite, et on n'en peut mener qu'un seul; car de ce point abaissons une perpendiculaire *CA* sur cette ligne *AP*; en faisant tourner l'angle droit *PAC*

116. autour de *AP*, on décrira le plan *MN* perpendiculaire à la ligne *AP*.

117. 7°. *Deux plans* MN mn *perpendiculaires à une même droite* AP ne peuvent se rencontrer; car s'ils n'étoient pas parallèles, en joignant un point quelconque *O* de leur ligne d'intersection avec les pieds *A* et *P*, les lignes *AO PO* seroient deux perpendiculaires abaissées d'un point *O* sur la même ligne *AP*.

118. 267. Soient deux lignes *AP BQ* parallèles, menons le plan *MN* perpendiculaire à l'une d'elles *AP*, il le sera aussi à l'autre *BQ*. En effet, traçons dans le plan *ACDB* des deux parallèles une sécante quelconque *CB*; la droite *BE*, menée dans le plan *MN* perpendiculaire à l'intersection *AB* de ces deux plans, le sera aussi sur *CB* (266, 2°.), sur le plan *ABC*, et par conséquent sur *DB*, (1°.). De plus, l'angle droit *CAB* est $=$ *DBA*, (182, 1°.) Donc *BD* perpendiculaire sur *AB* et *BE*, l'est au plan *MN*.

Réciproquement, deux droites *AP* et *BQ* perpendiculaires au même plan *MN* sont parallèles entre elles; car sans cela, on pourroit mener par le point *A*, une parallèle à *BD*, autre que *AC*; cette parallèle seroit, ainsi que *AC* perpendiculaire sur *MN*, ce qui est absurde (266,5°.)

Donc deux lignes *A* et *B* parallèles à une troisième *C* sont parallèles entre elles; car en menant un plan perpendiculaire à *C*, il le seroit aussi à ses parallèles *A* et *B*, en vertu de notre proposition : il suit de sa réciproque que *A* et *B* sont parallèles.

117. 268. *Les intersections* KI ki *de deux plans parallèles* MN mn *par un même plan* Ki *sont parallèles;* car d'une part elles sont dans un même plan, et de l'autre elles ne peuvent se rencontrer.

Donc, 1°. *la ligne* AP *perpendiculaire au plan* MN, *l'est aussi à tout autre plan parallèle*, car en menant par *AP* un plan quelconque *BCcb*, les intersections *BC bc* étant parallèles, l'angle *bPA* est droit. Ainsi *AP* est perpendiculaire à toute ligne *bc*, tracée par le point *P* dans le plan *mn*. 117.

2°. Si les plans *MN mn* sont parallèles, ainsi que les lignes *Ii Kk*, le plan de ces lignes donne les parallèles *IK ik*, ainsi la figure *Ik* est un parallélogramme, d'où *Ii* = *Kk*. Donc *les parallèles interceptées entre des plans parallèles sont égales*.

Donc *deux plans parallèles sont partout à égale distance l'un de l'autre*.

269. *Si la droite* Cc *est parallèle à la ligne* Aa, *elle l'est aussi à tout plan* Ab *qui passe par* Aa : puisque *Cc* étant entièrement comprise dans le plan *Ac* des deux parallèles, si elle pouvoit rencontrer *Ab*, ce ne seroit que dans l'un des points de *Aa*. 119.

Etant données deux droites *ab Cc* non parallèles, et qui ne se coupent pas, on peut toujours faire passer par l'une un plan parallèle à l'autre, et on n'en peut mener qu'un seul; car, par un point quelconque *a* ou *b*, menons *aA* ou *bB* parallèle à *cC*, le plan *Ab* sera celui qu'on demande.

270. L'inclinaison de deux plans *Ab Ac* qui se coupent, ou la quantité plus ou moins grande dont ils sont écartés l'un de l'autre, est ce qu'on appelle un angle *Dièdre* (à deux faces). Nous le désignerons par *baAc*, en mettant les lettres *aA* qui marquent l'intersection, entre celles *b c* qui se rapportent aux faces. 119.

Prenons sur l'intersection des plans, deux points arbitraires *A a*, menons deux plans quelconques parallèles *bac BAC*, et comparons entre eux les angles

119. *bac BAC* qui résultent de ces sections. Prenons sur les parallèles *ab* et *AB*, *ac* et *AC* des parties égales, *ab* = *AB*, *ac* = *AC* ; menons *Cc Bb cb* et *CB*. La figure *Ab* sera un parallélogramme (200), d'où *Bb* égale et parallèle à *Aa* : de même la figure *Ac* donne *Cc* égale et parallèle à *Aa*. Ainsi, *Bb* est égale et parallèle à *Cc*, et la figure *Cb* est un parallélogramme. On en conclut *CB* = *cb*, et par conséquent le triangle *bac* = *BAC*, et enfin, l'angle *bac* = *BAC*. Donc *les angles rectilignes qui résultent de l'intersection d'un angle dièdre par des plans parallèles quelconques sont égaux.*

Concluons de là que, 1°. *si les deux angles* bac BAC *ont les côtés parallèles*, ab *à* AB, ac *à* AC, *les plans* bac BAC *de ces angles sont parallèles* ; car si cela n'étoit pas, on pourroit imaginer un plan *DAE*, autre que *BAC*, parallèle à *bac* ; les intersections *AD AE* de ces plans, par les faces *Ac Ab*, seroient parallèles à *ac ab*, ainsi que *AC* et *AB* ; ce qui est absurde.

2°. *Si ces angles* bac BAC *ont l'ouverture dirigée dans le même sens, ils sont égaux.*

3°. Les triangles *bac BAC* qui joignent les extrémités de trois droites parallèles dans l'espace, sont égaux ; les plans de ces triangles sont parallèles.

120. 271. Soient deux angles dièdres *BAPC bapc*, coupés par des plans *BAC bac* perpendiculaires à leurs *arêtes* AP ap ; *les angles dièdres sont dans le meme rapport que les angles rectilignes* BAC bac, *formés par des perpendiculaires menées dans chaque face, en un point de leur arête.*

En effet, 1°. en quelque point de l'arête *AP* que la section perpendiculaire soit faite, l'angle *BAC* sera le même (270).

2°. Si les angles *BAC bac* sont égaux, les angles

dièdres le sont aussi, puisqu'ils coïncident en appliquant l'un sur l'autre les angles *BAC bac*. 120.

3°. Si *BAC* et *bac* ont une commune mesure *CAx*, en la portant sur *CAB* et *cab* autant de fois qu'elle peut y être contenue, et menant des plans par les lignes de division *Ax Ax'*... et les arêtes *AP ap*, chaque angle dièdre contiendra l'angle dièdre *CAPx*, autant de fois que *CAx* est contenue dans *CAB* et *cab*. D'où il suit que les angles dièdres sont entre eux dans le rapport de *CAB* à *cab*.

4°. Si les angles *CAB cab* sont incommensurables, on prouvera aisément (comme 168 2°.) que cette proportion a encore lieu.

Concluons donc, qu'*un angle dièdre a pour mesure l'angle rectiligne qui résulte de l'intersection de cet angle dièdre, par un plan perpendiculaire à son arête :* de sorte qu'en dernière analyse, les arcs de cercle servent aussi de mesure aux angles dièdres.

Dans la rencontre des plans entre eux, on trouve les mêmes théorêmes que pour celle des lignes. Ainsi, les angles adjacens de deux plans qui se coupent valent deux droits, et leurs angles opposés au sommet sont égaux. Deux plans parallèles, coupés par un plan sécant, forment les angles correspondans, alternes internes, alternes externes, égaux ; et réciproquement, etc....

272. Les plans sont dits perpendiculaires, lorsque leur angle dièdre est mesuré par un angle droit.

La droite AB *étant perpendiculaire au plan* MN, *tout plan* PQ *qui passe par cette ligne, est perpendiculaire à* MN, car en menant, dans le plan *MN*, la droite *AC* perpendiculaire sur *AP*, l'angle *BAC* est droit (271). 121.

Donc, 1°. *par une droite telle que* PQ *ou* AB, *on ne peut* 122.

122. *mener qu'un seul plan perpendiculaire à* MN ; ce plan est déterminé par une perpendiculaire *AP* à *MN*.

2°. La *Projection* A d'un point *P* sur un plan *MN*, est le pied de la perpendiculaire *AP* abaissée du point *P* sur ce plan.

La projection d'une ligne est la suite des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées des divers points de la ligne sur le plan. Si cette ligne est droite, telle que *PQ*, le système de toutes ces perpendiculaires formera un plan *PABQ*, perpendiculaire à *MN* : l'intersection *AB* de ces deux plans, est la projection de la ligne *PQ* ; projection qui est une droite déterminée par celles *A* et *B* de deux points *P* et *Q*.

L'angle qu'une ligne droite fait avec sa projection sur un plan, est ce qu'on appelle l'inclinaison de la droite sur le plan.

115. Les lignes *AB*, *AO*,..... sont les projections sur le plan *BAC* des droites *PB PO*...., et les angles qu'elles forment avec ce plan sont *PBA*, *POA*....

133. 3°. *Lorsque trois droites *Aa AD AB* sont perpendiculaires entre elles, chacune l'est au plan des deux autres.

121. 273. *Si les plans* PQ *et* MN *sont perpendiculaires entre eux, et qu'on mène dans l'un* PQ, *la perpendiculaire* AB *sur leur intersection* PR, *elle le sera à l'autre* MN; car si on mène dans le plan *MN*, *AC* perpendiculaire sur *PR*, l'angle *BAC*, qui mesure celui des plans, sera droit : ainsi, *AB* sera perpendiculaire sur *PR* et sur *AC*, (266).

Réciproquement si les plans *PQ* et *MN* sont perpendiculaires, et que, par un point *A* de leur intersection *PR*, on élève la perpendiculaire *AB* sur le plan *MN*, elle sera dans le plan *PQ*; car si elle n'y étoit pas, en menant, dans ce plan *PQ*, une perpendiculaire

à PR en A, elle seroit une seconde perpendiculaire en ce point au plan MN. 121.

Donc, si deux plans PQ RS sont perpendiculaires à un troisième MN, leur intersection AB est perpendiculaire à MN; car si par le point A, on veut élever une perpendiculaire à ce plan MN, elle doit être située à la fois dans les deux plans PQ et RS. 123.

274. Pour trouver la plus courte distance entre deux droites ab et AC non parallèles, et qui ne se coupent pas, on fera passer par ab un plan bac parallèle à AC, et par AC un plan BAC parallèle à ab (269). La plus courte distance cherchée sera visiblement celle de ces deux plans parallèles bac BAC (268, 2°.). Par ab, on mènera un plan Ab perpendiculaire au plan BAC; l'intersection BA coupera AC en un point A : enfin, Aa perpendiculaire sur le plan BAC sera la ligne rherchée. Donc *la plus courte distance de deux droites, est une ligne perpendiculaire à l'une et à l'autre.* 119.

275. Soient deux droites quelconques AB CD coupées en AEB CGD par trois plans parallèles MN PQ RS; menons AD, et joignons les points BD EFG AC; EF sera parallèle à BD (268), ainsi que AC à FG. On aura donc $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD}$ d'une part; et $\frac{AF}{FD} = \frac{CG}{GD}$ de l'autre : d'où $\frac{AE}{EB} = \frac{CG}{GD}$. Ainsi, *deux droites sont coupées en parties proportionnelles par trois plans parallèles.* 124.

4. *Des Angles polyèdres.*

276. Lorsque divers plans ont pour intersections successives, deux à deux, des droites SA SB SC... qui se réunissent en un même point S, l'espace indéfini 125.

125. renfermé entre ces plans est ce qu'on nomme *Angle polyèdre* ou *Angle solide*. Chacun des angles *ASB BSC...*, qui le composent sont des *Angles plans*.

Et si cet espace est limité par un plan *ABCDE* le corps *SABCDE* s'appelle une *Pyramide*.

Si le polygone *ABCDE* qui sert de base à une pyramide est régulier, et de plus si la perpendiculaire *SH* abaissée du *sommet* S, passe par le centre du polygone, la pyramide est dite régulière.

Du reste, on distingue les pyramides, ainsi que les angles polyèdres par le nombre des faces qui composent l'angle *S* : un angle *Trièdre* a trois faces, un angle *Hexaèdre* en a 6, etc.

125. 277. Cela posé, coupons un angle polyèdre *S* par deux plans parallèles *ABC... abc...* les lignes *ab* et *AB* seront parallèles, ainsi que *BC* et *bc*;.... on aura donc

$$\frac{SA}{Sa}=\frac{SB}{Sb}=\frac{AB}{ab}\,;\quad \frac{SB}{Sb}=\frac{SC}{Sc}=\frac{BC}{bc},\ \text{etc.}$$

et comme ces proportions s'enchaînent par un rapport commun, on trouve $\frac{SA}{Sa}=\frac{SB}{Sb}=\frac{SC}{Sc}=\ldots$ de sorte que *tant de lignes qu'on voudra qui partent d'un même point* S, *sont coupées en parties proportionnelles par deux plans parallèles* : ou *une pyramide a ses arêtes coupées proportionnellement par tout plan parallèle à sa base*. La réciproque se démontre aisément.

278. On a aussi $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\ldots$ et comme d'ailleurs les côtés des polygones *ABC... abc...* étant parallèles, les angles *A a*, *B b*;..... sont égaux (270), on en conclut que ces polygones sont semblables. Ainsi, *le polygone qui résulte de l'intersection d'une pyramide par un*

plan parallèle à sa base est semblable à cette base : ces 125.
polygones sont entre eux comme les carrés des distances au sommet, car, en menant la perpendiculaire SH sur ABC...., elle coupera abc.... en h, et on aura $\frac{AB^2}{ab^2} = \frac{ABCD...}{abcd...}$ (262) ; mais $\frac{AB}{ab} = \frac{SA}{Sa} = \frac{SH}{Sh}$; donc . . .

279. Soit un angle trièdre S, et ESG le plus grand 126.
de ses angles plans ; prenons dans cette face, l'angle $DSE = FSE$, puis deux parties quelconques $SD = SC$; enfin, menons par C et D un plan arbitraire. Les triangles DSB CSB visiblement égaux, donnent $BD = BC$, et comme $BA < BC + CA$, on en tire $AD < AC$. Ainsi, les triangles ASC ASD ont l'angle $ASD < ASC$ (199) ; et par conséquent l'angle $BSA < BSC + CSA$. Donc *dans tout angle trièdre l'un des angles plans est toujours plus petit que la somme des deux autres.*

280. Coupons l'angle polyèdre S par un plan quel- 128.
conque $ABCDE$, et des angles de cette base menons les lignes OA OB OC.... à un point O intérieur et arbitraire : elle aura autant de triangles qu'il y en a pour former l'angle S, et la somme des angles de ces divers triangles sera de part et d'autre la même.

Cela posé, on a l'angle plan $ABC < ABS + SBC$: on en doit dire autant des autres angles trièdres C D... ; d'où il suit que la somme des angles du polygone ABC,... est plus petite que la somme des angles à la base dans les triangles SAB SBC.... Donc la somme des angles plans en S est, pour compenser, plus petite que la somme des angles en O. Ce qui prouve qu'*un angle polyèdre a la somme des angles plans qui le composent, plus petite que quatre droits.*

On ne peut donc former avec des polygones réguliers

128. *égaux plus de cinq polyèdres :* car 1°. chaque angle de l'hexagone régulier valant $\frac{4}{3}$ d'un droit (235), ou $\frac{4}{3}$ D, trois de ces angles font $4D$, et ne peuvent être employés à former un angle polyèdre. A plus forte raison, ne pourroit-on pas employer quatre hexagones réguliers, ou des heptagones, des octogones réguliers, etc.

2°. On ne peut, avec 4, 5... pentagones réguliers, composer un angle polyèdre, non plus qu'avec 4, 5.... carrés, ou 6, 7.... triangles équilatéraux ; car chacun des angles vaut respectivement $\frac{6}{5}D$, $1D$, $\frac{2}{3}D$.

3°. Ainsi, le corps dont il s'agit ne peut avoir ses angles polyèdres formés que de trois pentagones réguliers; trois carrés; 5, 4 ou 3 triangles. (Voyez la Géom. de Legendre, app. aux livres VI et VII : on y démontre qu'on peut en effet former ainsi les polyèdres réguliers à 12, 6, 20, 8 et 4 faces).

126. 281. Soient deux angles trièdres S et s formés d'angles plans égaux $ESF = esf$, $FSG = fsg$, $ESG = esg$. Si on mène les plans BAC bac perpendiculaires aux arêtes égales SB et sb, on aura visiblement les triangles rectangles égaux $SBC = sbc$ et $SBA = sba$; d'où $SC = sc$, $SA = sa$; donc le triangle $SCA = sca$, et par suite le triangle $BAC = bac$. Ainsi l'angle $ABC = abc$ ou plutôt l'angle dièdre $ABSC = absc$. Il en est de même des deux autres angles dièdres; d'où il suit que *deux angles trièdres formés d'angles plans respectivement égaux, ont les angles dièdres égaux.*

126. 1°. *Si les angles plans égaux sont disposés dans le même ordre* comme fig. 126, en appliquant la face asb sur son égale ASB, sbc se placera sur SBC, sc sur SC et bca sur BCA : ainsi *les corps coïncideront.*

127. 2°. Mais si les angles plans égaux ne sont pas disposés dans le même ordre, comme si $ASB = A'S'B'$, $ASC = A'S'C'$ et $BSC = B'S'C'$, alors les angles dièdres sont encore

égaux, mais ils ne peuvent plus coïncider. Pour appliquer 127.
le triangle ABC sur son égal $A'B'C'$, il faut renverser
le corps $SACB$, placer BC sur $B'C'$, AB sur $A'B'$ et
AC sur $A'C'$; l'un des corps se trouve situé en dessus 129.
de la base ABC, l'autre est en dessous. Les corps sont
alors *Symétriques* (voyez n°. 300) car les perpendiculaires
SB $S'B$ sur le plan de la base sont égales.

3°. Il est visible qu'on pourra encore faire coïncider les 126.
angles trièdres S et s, s'ils ont un angle dièdre égal formé
par deux angles plans égaux et semblablement placés.

4°. *Si les angles polyèdres* S *et* S' *sont formés d'angles* 125.
dièdres égaux et d'angles plans égaux, chacun à chacun,
et disposés dans le même ordre, ils seront égaux. Car
menons des plans par l'une des arêtes SB et par toutes
les autres; ils formeront les angles trièdres $eSab$ $eSbd$.....
opérons de même sur S': l'angle trièdre $eSab = E'S'A'B'$,
donne l'angle plan $eSb = E'S'B'$, et l'angle dièdre
$aeSb = A'E'S'B'$: mais, par supposition, l'angle dièdre
$aeSd = A'E'S'D'$; retranchant, il vient $beSd = B'E'S'D'$.
Donc l'angle dièbre $beSd = B'E'S'D$: et ainsi des autres.

5. *Surfaces des corps.*

282. On nomme *Prisme* le corps engendré par le mou- 131.
vement d'une droite Aa, qui se meut parallèlement, son
extrémité A décrivant un polygone quelconque $ABCDE$,
et sa longueur restant la même. Si l'*Arête* Aa est perpen-
diculaire au plan de la *Base* ABC... on dit que le prisme
est *Droit*.

Comme Aa est égale et parallèle à Bb, Ba est un pa-
rallélogramme (200); il en est de même de Cb,.... donc
toutes les faces latérales d'un prisme sont des parallélo-
grammes. Une partie quelconque Aa' de l'arête Aa
engendre aussi des parallélogrammes Ba' Cb'... de sorte

131. que le polygone $a'b'c'$..... décrit par le point a', ayant ses côtés égaux et parallèles à la base ABC.... ces polygones sont égaux, et leurs plans sont parallèles (270,3°.). Donc *toute section faite dans un prisme par un plan parallèle à la base lui est égale : les bases opposées* ABC.... abc.... *sont donc égales et parallèles.* La distance de ces bases est la *Hauteur.*

132. 283. Il est visible que, les deux bases exceptées, l'aire du prisme est la somme des aires des parallélogrammes qui le composent. Si le prisme est droit, l'aire est le produit du contour de sa base par une de ses arêtes. En coupant le prisme Ac par un plan $a'b'c'$.... perpendiculaire à l'arête Aa, et plaçant la partie supérieure $a'c$ sous l'inférieure Ac', de sorte que abc.... coïncide avec ABC... le prisme deviendra droit. Donc *l'aire d'un prisme est le produit d'une arête* Aa *par le périmètre d'une section* a'b'c'... *qui lui est perpendiculaire.*

134. 284. Supposons que la base du prisme soit un parallélogramme $ABCD$; outre les faces AC ac égales et parallèles, on a encore la face Ab égale et parallèle à DC, puisque les côtés des angles aAB dDC sont égaux et parallèles (270). De même pour les faces Bc Ad : c'est ce qui a fait donner le nom de *Parallélipipède* au prisme dont la base est un parallélogramme, puisque *les six faces sont égales et parallèles deux à deux :* en sorte qu'on peut prendre l'une quelconque pour base.

Réciproquement le corps formé de six faces parallèles deux à deux est un parallélipipède; car les plans AC ac étant parallèles, AB est parallèle à ab, (268) ; de même pour Aa et Bb : la face Ab est donc un parallélogramme, de même pour Bc, Ad,...., donc le polyèdre peut être considéré comme engendré par le mouvement de Aa glissant sur les côtés du parallélogramme $ABCD$.

Un prisme est déterminé lorsque la base *ABC*.... et 132.
l'arête génératrice *Aa* sont données : donc un parallélipipède l'est, lorsqu'on connoît l'un de ses angles trièdres
et les longueurs des arêtes *Aa AB* et *AD* qui le forment. 134.

Si l'arête *Aa* est perpendiculaire à la base, et si cette 133.
base est un rectangle, le parallélipipède est *Rectangle* : si en outre les arêtes sont égales, on le nomme *Cube*.

285. Le plan *DdbB* qui passe par deux arêtes opposées 134.
donne un parallélogramme dont *les diagonales* Db Bd *se coupent en deux parties égales* (231) ; le point *O* d'intersection est donc le même pour les quatre diagonales.

286. Le *Cylindre* est un corps engendré par une ligne 135.
indéfinie *Aa* qui se meut parallèlement en glissant sur une courbe quelconque *ABCD*. Nous regarderons ici le cylindre comme terminé par deux bases parallèles . . . . . *ABCD abcd*; la *Hauteur* est la distance entre les bases.

Inscrivons et circonscrivons des polygones à la base du cylindre : la génératrice en glissant sur leur contour décrira deux prismes, dont le cylindre est visiblement la limite (*), comme sa base est la limite de leurs bases. Il est aisé de conclure de là que

1°. Toute section faite dans un cylindre parallèlement à la base, donne une courbe égale à cette base.

2°. Soit C le contour de la base d'un cylindre *Droit* 136.
Ac, α l'excès du périmètre du polygone circonscrit sur C, en sorte que ce périmètre $= C + \alpha$; $Aa = H$; enfin S

(*) Cette proposition repose sur celle-ci, qui est analogue à celle du n°. 160, et que nous regardons comme évidente d'après l'idée que nous nous formons de l'étendue des aires. L'aire d'une figure plane est moindre que celle de toute surface terminée au même contour ; et de deux surfaces convexes terminées à ce contour, la plus grande est celle qui enveloppe l'autre.



136. l'aire du cylindre et β l'excès de celle du prisme circonscrit sur S ; on aura $S+\beta=H(C+\alpha)$, d'où (167), $S=HC$: *l'aire du cylindre droit est donc le produit du contour de sa base par sa hauteur.*

135. 3°. Si le cylindre est oblique Ac, la section $a'b'c'd'$ perpendiculaire à la génératrice forme deux corps Ac' $a'c$ qui rapprochés par leurs bases ac et AC, qu'on fait coïncider, donnent un cylindre droit. Ainsi, l'aire du cylindre oblique est le produit de sa génératrice Aa par le contour d'une section $a'b'c'd'$ perpendiculaire.

137. 4°. Le rectangle Ac qui a, pour hauteur Aa la génératrice d'un cylindre droit, et pour base AC le contour de sa base rectifiée, est égal à l'aire de ce cylindre.

138. C'est ce que Monge nomme le *Développement* de cette surface. Lorsque le cylindre est oblique, la section perpendiculaire à l'arête se développe suivant une ligne droite $a'd'$ à laquelle toutes les génératrices sont perpendiculaires. Si donc on élève en divers points a' b' c' d' des perpendiculaires sur lesquelles on portera en dessus et en dessous des parties $a'a$ $a'A$, $b'b$ $b'B$,.... respectivement égales aux portions de chaque génératrice, tant en dessus qu'en dessous de la section $a'b'c'd'$, fig. 135, on aura l'aire aD, terminée par deux courbes parallèles . . $abcdABCD$, et qui sera le développement de la surface du cylindre.

5°. On ne considère en géométrie que les cylindres dont la base est circulaire ; on nomme *Axe* la droite parallèle à la génératrice et qui passe par le centre. Le cylindre droit peut alors être regardé comme engendré par un rectangle qui tourne autour d'un de ses côtés. L'aire est $S=2\pi RH$, R étant le rayon de la base et H la hauteur.

287. L'aire d'une pyramide s'obtient en évaluant celles des triangles qui la composent : mais *si la pyramide est*

régulière, l'aire est le produit du contour de sa base par 138.
la perpendiculaire menée du sommet sur un de ses côtés, parce que ces triangles sont égaux, et ont pour hauteur commune cette perpendiculaire, qu'on nomme *Apothéme.*

288. On nomme *Cône* le corps engendré par une droite 139.
indéfinie *AS* qui passe toujours par un point fixe *S*, qui est le *Sommet*, et qui glisse sur une courbe donnée quelconque *ABCD*. Cette surface est formée de deux *Nappes* opposées, réunies en *S*. Nous ne traiterons ici que du cas où la base est circulaire : l'*Axe* est la ligne menée du sommet *S* au centre de la base, la *Hauteur* est la perpendiculaire menée du sommet sur la base. Quand cette perpendiculaire se confond avec
l'axe, on dit que le cône est *Droit*; on peut le con- 140.
cevoir engendré par un triangle rectangle *ASO* qui tourne sur un côté *SO* de l'angle droit.

289. Si on inscrit et circonscrit des polygones réguliers 140.
au cercle de la base, en menant des lignes de leurs angles au sommet *S* d'un cône droit, on formera des pyramides régulières, l'une inscrite l'autre circonscrite au cône, qui sera visiblement leur limite. Il suit de là que

1°. Soit *C* la circonférence de la base, α l'excès du périmètre du polygone circonscrit sur cette circonférence; la pyramide circonscrite a pour aire $\frac{1}{2} A(C+\alpha)$, en désignant par *A* l'apothême *SA* qui est la génératrice. Mais soit *S* l'aire du cône et β l'excès de celle de la pyramide sur *S*, on aura $S+\beta=\frac{1}{2} A(C+\alpha)$ d'où (167), $S=\frac{1}{2} AC$: ainsi, *l'aire du cône droit est le produit de la circonférence de la base par la moitié de sa génératrice.* On a donc $S=\pi AR$, *R* étant le rayon de la base.

2°. Si, avec un rayon $SA=$ la génératrice *A*, on décrit 142.
un arc *ABD* d'une longueur égale à la circonférence de la base, le secteur *ASD* aura la même aire que le

1[illegible] cône (261). Ce sera son développement; les génératrices seront les divers rayons de ce secteur.

141 et 3°. Soit un cône tronqué à bases parallèles *AadD*;
142. son aire est la différence de celles des cônes *SAD Sad*. Si d'un même centre *S* avec les rayons *SA Sa* des génératrices de ces cônes, on décrit les arcs *AD ad*, puis qu'on prenne *ABD* égal à la circonférence *AC* de la base inférieure, et qu'on mène les rayons *SA SD*, l'arc *abd* sera égal à la circonférence supérieure *ac*; car d'une part $\frac{SA}{Sa} = \frac{AC}{ac}$ ou $= \frac{\text{cir. } AC}{\text{cir. } ac}$; de l'autre $\frac{SA}{Sa} = \frac{ABD}{abc}$ ou $= \frac{\text{cir. } AC}{abc}$. Les aires *SABD Sabd* étant équivalentes à celle des cônes *SACD Sacd*, le tronc l'est à *ABDdba*, qui en est le développement; on en conclut (261) que *l'aire du tronc de cône à bases parallèles est égal au produit de son côté* Aa *multiplié par la moitié de la somme des circonférences* AC ac *des bases, ou par la circonférence* a'b'c'd' *menée à distance égale des deux bases.*

143. 290. La *Sphère* est un corps engendré par la révolution d'un demi-cercle *ADB* sur son diamètre *AB*. Dans cette révolution, un arc quelconque *AD* décrit une *Calotte*; *DF* ou *DE* engendre une *Zône*; le secteur *ACD* produit le *Secteur sphérique*; enfin, le segment *ADI* donne le *Segment sphérique*.

Il suit de là que la surface de la sphère a tous ses points à égale distance du centre *C*, et que si on fait tourner le cercle générateur *ADEBG* autour d'un autre diamètre quelconque *DH*, il produira la même sphère. Par conséquent, tout plan qui passe par le centre coupe la sphère suivant le cercle générateur, qu'on nomme un *Grand cercle de la sphère*.

291. Lorsqu'une courbe quelconque $ACDB$ tourne autour d'un axe AB, elle engendre une *Surface de révolution*. Le caractère distinctif de ces surfaces consiste en ce que, quelle que soit la courbe génératrice $ACDB$, *tout plan perpendiculaire à l'axe, donne pour intersection une circonférence de cercle*. Car la droite DI perpendiculaire à AB, décrira dans son mouvement un plan perpendiculaire à l'axe (266, 4°.); de plus le point D conservera toujours la même distance DI à cet axe. 144.

C'est ce qui a lieu pour le cylindre et le cône droits (286, 5°. et 288); la sphère présente même cette propriété d'une manière plus étendue, et *un plan quelconque coupe la sphère suivant un cercle*. En effet, soit DG ce plan, menant le diamètre AB perpendiculaire, on peut supposer que la sphère a été engendrée autour de cet *Axe de révolution*. Le diamètre du cercle est la corde DG; c'est pour cela qu'on nomme *Petit cercle de la sphère*, celui qu'on obtient quand le plan coupant ne passe pas par le centre. La base d'un segment sphérique est donc un petit cercle. 143.

292. Le plan qui n'a qu'un point de commun avec la sphère, s'appelle *Tangent :* toute droite menée du centre à ce plan étant plus longue que le rayon mené au point de contact, ce rayon est donc perpendiculaire au plan tangent (266, 5°.). La réciproque se démontre aisément. Faisons tourner une tangente quelconque AT, ainsi que le cercle ADB, autour du diamètre AB, AT engendrera le plan tangent à la sphère 143.

293. Lorsqu'un polygone $ABDI$... tourne autour d'un axe AO, chaque côté DI engendre un tronc de cône dont l'aire est $DI \times$ cir. KL, K étant le milieu de DI, et KL perpendiculaire sur l'axe AO. (289, 3°.). Il est 145.

145. donc bien facile d'avoir l'aire entière engendrée par le polygone.

Mais si le polygone est régulier, cette aire devient plus aisée à obtenir; en effet, soit inscrit un cercle, et mené DG parallèle à l'axe AO de révolution, puis le rayon KQ: les triangles DIG LKC ayant leurs côtés perpendiculaires, donnent $\frac{DI}{DG}=\frac{KC}{KL}$ ou $=\frac{\text{cir. } KC}{\text{cir. } KL}$, d'où . . . . . $DI\times\text{cir. }KL=DG\times\text{cir. }KC$: ainsi l'aire du tronc de cône engendré par $HDIM$ est le produit de la circonférence du cercle inscrit, par la hauteur DG ou HM de ce tronc.

Il est visible que la même chose a lieu pour le cylindre engendré par le côté IP parallèle à AO. Quant au cône que décrit BA, son aire est $\frac{1}{2}\,BA\times\text{cir }BN$, (289, 1°.); et les triangles semblables ABN QCA donnent de même $QA\times\text{cir }BN=AN\times\text{cir }QC$. Il en résulte donc que la somme des aires engendrées par la révolution de plusieurs côtés de polygone régulier, est égale à la circonférence inscrite multipliée par la somme des hauteurs.

Il suffit, pour notre démonstration, que la portion de polygone générateur soit circonscriptible au cercle : or, la calotte ou la zône sphérique est visiblement la limite de l'aire engendrée par une semblable partie de polygone ; d'où il est facile de conclure que 1°. *l'aire de la calotte ou de la zône sphérique est le produit de sa hauteur par la cir-*
143. *conférence d'un grand cercle.* Soit R le rayon de la sphère, X la hauteur de la calotte engendrée par DA ou de la zône décrite par l'arc FD ou FE, on a (248)

$$\textit{surface de la zône} = 2\pi RX.$$

2°. *L'aire de la sphère est le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle, ou quadruple de*

l'aire d'un grand cercle, puisque l'aire circulaire est le produit de la moitié du rayon par la circonférence. On a donc 143.

surface de la sphère $= 2R \times \text{cir.}\, R = 4\pi R^2$.

3°. Pour trouver le rayon de la sphère dont l'aire A est donnée, on évaluera $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\pi}} = 0{,}282095 \times \sqrt{A}$.

4°. Menons les tangentes DE DG GF EF perpendiculaires et parallèles au diamètre AB; le carré EG engendrera, dans sa révolution, autour de AB, *le cylindre circonscrit à la sphère;* or l'aire $a'e'f'b'$ de la zône produite par un arc quelconque $b'f'$ est égale à celle du cylindre $ae\,e'a'$, puisque leur valeur est la même, $dg \times \text{cir}\, AC$ ou cir EB. Il en seroit de même du cylindre entier par le rapport de la sphère; de sorte que *l'aire de la sphère est égale à celle du cylindre circonscrit; et si on y comprend les bases, l'aire de la sphère est les* $\frac{2}{3}$ *de celle du cylindre*, puisque les deux bases étant des grands-cercles, l'aire entière du cylindre en vaut 6, et celle de la sphère 4. 146.

6. *Des Corps semblables et symétriques.*

294. On dit que deux tétraèdres sont *semblables*, quand ils ont deux faces semblables, placées de la même manière et formant un angle dièdre égal. Tels sont les deux tétraèdres S et S' lorsque $S'A'C'$ est semblable à SAC, $B'S'A'$ à BSA et l'angle dièdre $B'S'A'C' = BSAC$. 147.

Plaçons le triangle $C'S'A'$ sur CSA en faisant coïncider les angles égaux S et S', $A'C'$ tombera en ac parallèlement à AC, à cause des angles égaux $S'A'C'$ et SAC. De plus la face $B'S'A'$ se couchera sur BSA en vertu de l'égalité des angles dièdres; enfin l'angle $B'S'A' = BSA$, indique que $S'B'$ tombera sur SB, et $B'A'$ suivant ab parallèle

147. à AB. Le tétraèdre S' sera donc placé en $Sabc$; les plans ABC abc sont parallèles et les angles dièdres homologues sont égaux (270). On voit déja qu'un tétraèdre $SABC$ coupé par un plan abc parallèle à l'une de ses faces ABC, forme un tétraèdre semblable au premier.

Puisque le plan abc est parallèle à ABC, les faces ABC abc sont semblables (277, 270); de même pour SBC sbc: donc *les arêtes homologues des tétraèdres semblables sont proportionnelles, toutes les faces sont semblables, les angles dièdres sont respectivement égaux ainsi que les angles polyèdres homologues.*

Réciproquement si les arêtes homologues de deux tétraèdres sont proportionnelles, ou si les quatre triangles sont respectivement semblables (l'une des conditions emporte l'autre), les angles plans en S et S' étant égaux, les angles dièdres le sont aussi (281). Donc les tétraèdres sont semblables.

295. Deux polyèdres sont semblables lorsqu'en menant de deux angles solides homologues des diagonales à tous les autres, les corps sont décomposés en tétraèdres semblables et disposés dans le même ordre.

125. Coupons la pyramide SAD par un plan ad parallèle à la base; les tétraèdres $SABE$ $sabe$ semblables, donnent les triangles SEB seb semblables, et l'angle dièdre . . . . . . $ASEB = aseb$: mais comme l'angle dièdre $ASED = ased$, en retranchant, on trouve que l'angle dièdre. . . . . $BESD = besd$. Donc les tétraèdres $SBED$ $sbed$ sont semblables, etc. Ainsi *toute pyramide coupée par un plan parallèle à sa base donne une autre pyramide semblable; leurs faces sont semblables, leurs arêtes proportionnelles, les angles dièdres et polyèdres respectifs sont égaux* (277, 281).

Réciproquement les pyramides $S'A'B'C'$.....$SABC$....... formées de faces semblables et disposées dans le même

ordre sont semblables; car les angles trièdres qui compo- 125.
sent les bases étant formés d'angles plans égaux, sont égaux : donc les angles dièdres homologues le sont aussi (281). D'ailleurs les angles plans égaux en S et S' permettent de faire coïncider $S'A'D'$ en *sad*. Enfin les arêtes étant proportionnelles par supposition, les plans AD ad sont parallèles.

296. Soit la pyramide SAD et le corps $S'A'D'$ formé de tétraèdres $S'A'B'E'$ $S'E'B'D'$..... semblables à . . . . . . 125.
$SABE$ $SEBD$....... le polyèdre $S'A'D'$ sera une pyramide semblable à SAD : car puisque les angles AEB BED AED sont dans un même plan et égaux à $A'E'B'$, $B'E'D$, $A'E'D'$,

on a $$AED = AEB + BED,$$

d'où $$A'E'D' = A'E'B' + B'E'D'$$

ce qui prouve que ces derniers angles sont aussi dans le même plan, puisque s'ils formaient un angle trièdre, on aurait (279), $A'E'D' < A'E'B' + B'E'D'$. On voit que ce plan passe aussi par $B'C'D'$.

Il suit de là que, 1°. deux polyèdres semblables sont décomposés en pyramides semblables par des diagonales menées de deux angles polyèdres homologues à tous les autres.

2°. Si d'un point intérieur quelconque on mène des lignes à tous les angles, et qu'on les prolonge proportionnellement à leurs longueurs, les plans menés par les extrémités de ces lignes seront parallèles aux faces du polyèdre proposé, et en formeront un autre qui lui sera semblable. On trouve ici l'analogue du théorème 244.

297. *Deux polyèdres semblables ont leurs faces semblables, leurs arêtes homologues proportionnelles, leurs angles dièdres égaux, ainsi que leurs angles polyèdres.* Pour s'en convaincre, il suffit de mener de deux angles

125. homologues les diagonales qui décomposent les corps en pyramides semblables; les angles polyèdres et dièdres de ces pyramides seront égaux, leurs faces seront semblables; or, les faces des polyèdres servent de bases à ces pyramides dont les angles dièdres et polyèdres constituent par leur système ceux des corps proposés.

148. Réciproquement si deux polyèdres ont les faces semblables et disposées dans le même ordre, et les angles dièdres égaux, ils sont semblables : car les angles polyèdres sont égaux, comme décomposables en angles trièdres égaux (281). Faisons donc coïncider l'un de ces angles polyèdres avec son homologue, les autres faces seront respectivement parallèles. De plus, la similitude des faces donne les lignes homologues proportionnelles; leurs aires sont donc entre elles comme les carrés de ces lignes; ce qui prouve que les diagonales de l'un des corps sont le prolongement de celles de l'autre (278) : ces corps sont donc formés de pyramides semblables.

148. 298. Les lignes qui joignent quatre angles polyèdres homologues *ABCD abcd* de deux corps semblables étant proportionnelles, forment des tétraèdres semblables (294). Il en résulte que si des angles *ABC abc* de triangles homologues on mène des lignes à tous les angles *DEF..... def....* de deux polyèdres semblables, les tétraèdres ainsi formés seront semblables; ceci est analogue au n°. 242, 2°.

Réciproquement deux polyèdres sont semblables lorsque leurs angles étant joints aux trois angles homologues *ABC abc*, les tétraèdres ainsi formés sont respectivement semblables. En effet, si les tétraèdres *DABC dabc* sont semblables, ainsi que *EABC eabc*, les angles dièdres *DACB EACB* seront égaux à *dacb eacb* : ainsi l'angle dièdre *DACE* = *dace*. D'ailleurs les faces *DAC dac* de nos tétraèdres sont semblables, ainsi que *EAC eac* : donc les

tétraèdres $EACD\ eacd$ sont semblables, et on a $\frac{DE}{de}=\frac{AC}{ac}$ 148. (294).

Soient Ff, Ii des angles homologues, on aura de même $\frac{FE}{fe}=\frac{AC}{ac}$ et $\frac{DF}{df}=\frac{AC}{ac}$: ainsi *les corps ont leurs lignes homologues proportionnelles, et les triangles* DFE dfe *homologues sont semblables :* de plus *leurs angles dièdres sont égaux*, puisque IDF est semblable à idf, IFE à ife, d'où l'angle $IFD=ifd$, $IFE=ife$, $DFE=dfe$. En outre, si les points $DIFE$ sont dans le même plan, l'équation $IFE=IFD+DFE$ se change en $ife=ifd+dfe$: d'où il suit que les points efi étant aussi dans un même plan, *les faces des polyèdres sont donc semblables ;* enfin *les angles polyèdres sont égaux* comme composés d'angles trièdres égaux (281, 4°.). Ainsi les corps sont semblables (297).

299. Lorsque deux polyèdres sont semblables, les aires de leurs faces sont comme les carrés des lignes homologues de ces polyèdres : mais comme ces lignes sont proportionnelles, on a une suite de rapports égaux, formés par les faces homologues, d'où on conclut (comme 262, II) que *les aires totales des polyèdres semblables, sont entre elles comme les carrés de leurs arêtes homologues.*

On verra aisément que les surfaces de cônes ou de cylindres semblables, c.-à-d. engendrées par deux triangles ou deux rectangles semblables, sont entre elles comme les carrés de leurs génératrices. En effet, les circonférences C et c des bases sont proportionnelles aux génératrices A et a ; les aires S et s le sont à CA et ca (286, 5°., 289, 1°.) d'où $\frac{S}{s}=\frac{CA}{ca}$, $\frac{C}{c}=\frac{A}{a}$; donc $\frac{S}{s}=\frac{A^2}{a^2}$.

De même *les aires des sphères sont comme les carrés de leurs rayons.*

149. 300. Lorsque deux polyèdres sont tels qu'on peut les placer l'un en dessus, l'autre en dessous d'un plan MN, de sorte que les sommets des angles polyèdres A a, soient deux à deux à égale distance de ce plan, et sur une perpendiculaire Aa, à ce plan : ces deux polyèdres sont appelés *Symétriques*. B étant un angle polyèdre du premier corps, en menant $B\,Q\,b$ perpendiculaire au plan MN et prenant $QB = Qb$, b sera l'angle homologue du second polyèdre.

En pliant le trapèze $ABPQ$ suivant PQ, les lignes AP aP égales et perpendiculaires coïncideront, ainsi que BQ et bQ ; d'où $AB = ab$: donc *les lignes homologues sont égales*. De même $D\,d$, $C\,c$ étant des angles polyèdres symétriques, on aura $BC = bc$; $AC = ac$; ainsi le triangle $ABC = abc$: *les triangles homologues sont donc égaux*. De plus le triangle $ADC = adc$, $BDC = bdc$; ainsi l'angle $DCB = dcb$, $ACD = acd$, $ACB = acb$. Or

1°. Si les plans de ces triangles forment en C et c des angles trièdres, ils seront égaux : donc *les angles dièdres et trièdres homologues sont égaux. Il en est de même des angles polyèdres*, puisqu'ils sont formés d'angles trièdres égaux disposés dans le même ordre.

2°. Si les points $ABCD$ sont dans le même plan, comme l'angle $DCB = ACD + ACB$, on a. . . . . . . $dcb = acd + acb$, d'où il suit que les points $abcd$ sont aussi dans le même plan : donc *les faces homologues sont égales*, comme formées de triangles égaux.

Concluons de là que *les polyedres symétriques ont toutes leurs parties constituantes égales*.

150. 301. Coupons le parallélipipède Ac par le plan $DB\,bd$, les deux corps $A\,a\,b\,d$ $C\,c\,b\,d$ sont visiblement des prismes (282) ; la base BDC ou bdc de l'un sera égale à ABD. Rapprochons ces prismes triangulaires en faisant coïncider

bdc avec *ABD*, savoir, *bc* avec *AD* et *dc* avec *AB*; 150.
Ccbd prendra la situation *AEHI*. Or, les perpendiculaires *aF Cf* sur les bases sont égales (268), on a de plus $Aa = Cc$ et l'angle $AaF = cCf$; ainsi le triangle $AaF = Ccf$, d'où $AF = cf$. Par une raison semblable $fb = DF$; ainsi les triangles égaux *ADF bcf* coïncident et le point *f* tombant en *F*, *fC* se porte en *FE* sur le prolongement de *aF*. Donc le sommet *E* ou *c* est symétrique de *a* : on verra de même que *I* ou *b* l'est de *d*; et *H* ou *d* l'est de *b*.

Concluons de là que 1°. *tout parallélipipède est formé de deux prismes triangulaires symétriques*; 2°. *les angles trièdres opposés sont symétriques*; 3°. *les angles dièdres opposés sont égaux.*

CHAPITRE III.

DES VOLUMES.

302. *AD* étant un prisme oblique quelconque, prolongeons-en les arêtes et menons un plan quelconque *MN* 151.
perpendiculaire; puis enfin prenons $Pp = BD$ et menons le plan *op* parallèle à *MN* : on aura ainsi le prisme droit *Oq*. Appliquons les prismes tronqués *BAOP DCop*, de manière à coucher la base *op* sur *OP* qui lui est égale : les génératrices étant perpendiculaires aux bases, et de plus égales (puisque $DB = Pp$ donne $PB = pD$, et ainsi des autres), les prismes coïncideront. Retranchant la partie commune *Ap*, il reste le prisme oblique *AD* équivalent au prisme droit *Op*. *Il est donc bien aisé d'avoir un prisme*

151. *droit équivalent à un prisme oblique, la génératrice ayant même longueur.*

303. On peut toujours disposer deux prismes symétriques *AD ad* relativement à un plan *MN*, en sorte qu'il soit perpendiculaire aux génératrices. Prolongeons l'arête *DB* en *Pd*, puis à partir du point *P* de rencontre avec un plan quelconque *MN* perpendiculaire, prenons. . . . . *Pb* = *PB*, *Pd* = *PD* ou *BD* = *bd*. En raisonnant de même pour chaque arête, on formera le prisme *ad* symétrique à *AD*.

Cela posé, prenons *Pp* = *Pp'* = *BD* et menons les plans *op o'p'* parallèles à *MN* : les prismes *OPop OPo'p'* sont droits et équivalens aux proposés (302). De plus ils sont égaux entre eux, puisqu'en les appliquant de sorte que la base *o'p'* de l'un tombe sur celle *OP* de l'autre qui lui est égale, il y aura coïncidence. Donc *les prismes symétriques sont équivalens.*

304. Soient deux parallélipipèdes de même hauteur et de même base, rapprochons ces corps de manière à faire coïncider leurs bases inférieures ; les supérieures seront situées dans le même plan : il se présentera deux cas.

152. 1°. Si les faces latérales *FG EK* sont dans un même plan, les triangles égaux *EGH FIK* servent de bases à deux prismes superposables *EHM FIN*. Donc, en retranchant tour-à-tour ces prismes du corps entier *EN*, il restera les parallélipipèdes équivalens *EFIM EHNL*.

153. 2°. Si les faces ont une disposition quelconque, les bases supérieures *AC ac* seront des parallélogrammes égaux à ceux des bases inférieures, en sorte que les lignes *AB DC ab dc* seront égales et parallèles; de même pour *AD BC ad bc*. Prolongeons ces lignes, nous aurons le parallélogramme *A'C'* égal à *AC* et *ac*. Or, concevons le parallélipipède qui auroit pour base supérieure *A'C'*, et la

même base inférieure que les proposés ; ce corps sera 153.
équivalent à chacun de ceux-ci, puisqu'il sera relativement à eux dans l'état examiné ci-dessus. Les proposés sont donc équivalens.

Donc *deux parallélipipèdes de même base et de même hauteur sont équivalens.*

305. Il est facile de changer un parallélipipède donné en un autre rectangulaire équivalent : de chaque angle de la base inférieure $ABCD$, élevons des perpendiculaires à son 154.
plan, on aura un parallélipipède droit $ABEI$ équivalent au proposé. Puis menant AF BG perpendiculaires sur AB dans la base AC, on formera sur AG le parallélipipède rectangle $ABHK$ équivalent à $ABEI$ puisqu'il a même base AM et même hauteur AF.

306. *Deux parallélipipèdes rectangles de même base sont* 99.
entre eux comme leurs hauteurs. Si ces hauteurs ont une commune mesure, on coupera les corps en tranches égales; et on raisonnera comme pour les rectangles (250, 1°.). On démontrera de même le théorême, pour le cas où les hauteurs sont incommensurables.

P et p étant deux parallélipipèdes de même hauteur, 100.
plaçons ces corps de manière à faire coïncider l'un de leurs angles polyèdres et leur arête égale. Les bases seront disposées comme AC pour P et AK pour p; or, prolongeons IK en H, le parallélipipède Q construit sur la base AH et de même hauteur, peut être regardé comme ayant AD pour hauteur et la face AB pour base : comparé à P, il donne donc $\frac{P}{Q} = \frac{AD}{AI}$. Mais si on prend la face AI pour base des parallélipipèdes Q et p, leurs hauteurs seront AB et AL, d'où $\frac{Q}{p} = \frac{AB}{AL}$. En multipliant

100. ces proportions il vient $\frac{P}{p} = \frac{AD \times AB}{AI \times AL} = \frac{AC}{AK}$. Donc *les parallélipipèdes rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Enfin, si les parallélipipèdes rectangles P et p, dont les bases sont AC et AK, ont des hauteurs quelconques H et h, en prolongeant les faces de celui qui a une hauteur moindre, tel que p, jusqu'à la base supérieure de l'autre, on formera un parallélipipède R qui aura même hauteur H que l'un P, et même base AK que l'autre p; on aura donc $\frac{R}{p} = \frac{H}{h}$ d'une part, et $\frac{P}{R} = \frac{AC}{AK}$ de l'autre ; d'où $\frac{P}{p} = \frac{AC \times H}{AK \times h}$. Ainsi *les parallélipipèdes rectangles quelconques sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.*

En désignant par HIK les arêtes qui forment un angle trièdre de P, et par $h\ i\ k$ celles de p, on a $\frac{P}{p} = \frac{HIK}{hik}$. On voit donc que pour mesurer le volume d'un parallélipipède rectangle P, c.-à-d. pour trouver son rapport avec un autre p pris pour unité, on cherchera les rapports. . . $\frac{H}{h}\ \frac{I}{i}\ \frac{K}{k}$ entre les arêtes respectives qui forment un angle trièdre, et on multipliera ces trois nombres.

Si donc on prend pour unité de volume le cube qui a pour côté l'unité linéaire, h, i et k seront $= 1$, et on aura HIK pour le volume de P. Ainsi *le volume d'un parallélipipède est le produit de sa base par sa hauteur.* Par le produit de trois lignes, on entend le produit des nombres d'unités contenus dans chacune. Lorsque $H = I = K$ on a



$P = H^3$; de là la dénomination de *Cube* donnée aux troi- 100.
sièmes puissances.

307. Il suit de là que *le volume d'un prisme est le produit de sa base par sa hauteur* : car, 1°. s'il s'agit d'un parallélipipède quelconque, il est équivalent à celui qui est rectangle de même hauteur et de base équivalente.

2°. Si le prisme est triangulaire comme *ABDabd*, en 150.
formant le parallélipipède *Ac*, le volume de notre prisme est égal à son symétrique *BDCbdc* (303) : donc chacun de ces prismes a pour volume le produit de sa hauteur par la moitié de la base *AC*, ou plutôt par sa base *ABD*.

3°. Enfin, si on fait passer des plans par la génératrice 131.
Aa du prisme *Ad* et par toutes les autres, il sera décomposé en prismes triangulaires de même hauteur; la somme de leurs volumes sera donc le produit de cette hauteur par la somme des bases, ou par *ABCDE*.

On voit aussi que les volumes des prismes de même base sont comme les hauteurs, ou de même hauteur sont comme leurs bases.

308. Désignons par H la hauteur d'un cylindre, par B sa base, par β l'excès de la base du prisme circonscrit sur celle du cylindre, et par α l'excès du volume de ce prisme sur celui V du cylindre. $B+\beta$ sera la base du prisme, $V+\alpha$ son volume ; d'où $V+\alpha=(B+\beta)H$; donc $V=BH$, puisque le volume du cylindre est la limite de celui du prisme. *Le volume d'un cylindre est le produit de l'aire de sa base par sa hauteur.*

309. Coupons un tétraèdre par des plans parallèles à 155.
sa base et équidistans ; soit *ACcbaB* l'une des tranches : menons par les points *A C a c* des parallèles à l'arête *Bb*; nous formerons deux prismes, l'un *BDFcba* intérieur, l'autre *BACebi* extérieur au tronc : la différence de ces

155. prismes est le prisme $DCea$ qui a même hauteur, et dont la base est la différence entre les bases ABC abc.

En raisonnant de même pour chaque tranche, on aura une série de prismes d'égale hauteur, tels que De. La somme de ces prismes, ou la différence entre les prismes extérieurs et intérieurs, sera un prisme de même hauteur que les tranches, et dont la base sera celle BMN du tétraèdre, qui est la somme des bases; puisque celle de chaque prisme De est une portion de BMN, comprise entre CA FD parallèles à MN. Plus les tranches seront nombreuses, et plus cette différence deviendra petite : on pourra donc rendre aussi petite qu'on voudra la différence entre chaque prisme intérieur et la tranche du tétraèdre.

Cela posé, soient maintenant deux tétraèdres T et t de même hauteur, dont les bases équivalentes reposent sur le même plan. Soient α et β les excès des tétraèdres sur la somme des prismes intérieurs, dont les volumes sont $T - \alpha$ et $t - \beta$. Or, chaque plan parallèle aux bases des tétraèdres, donne des sections équivalentes, puisqu'elles sont entre elles comme ces bases. Donc les prismes intérieurs sont égaux deux à deux, d'où $T - \alpha = t - \beta$, ou plutôt $T = t$, (167). Donc *les tétraèdres de même hauteur et de bases équivalentes sont égaux en volume.*

156. 310. Sur les trois arêtes AB BC BD du tétraèdre $DABC$, formons le prisme AE; ôtons ce tétraèdre, il restera la pyramide quadrangulaire $DACEF$. Le plan CDF forme deux tétraèdres, l'un $FDEC$ qui est égal au proposé, comme ayant même base et même hauteur; l'autre $DACF$ égale $DFCE$ par la même raison, puisque le triangle $FAC = FEC$. Ces trois tétraèdres étant équi-

valens, on voit qu'*un tétraèdre est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur.* 156.

Donc *le volume de toute pyramide est le produit du tiers de sa base par sa hauteur*, puisqu'elle est décomposable en tétraèdres.

Et comme le cône est la limite des pyramides circonscrites, *le volume du cône est le tiers de sa base multiplié par sa hauteur.*

On aura le volume d'un polyèdre quelconque en le décomposant en pyramides.

311. Faisons la même construction sur le tronc de prisme *ABCFDE*; le plan *ADC* donne le tétraèdre *DABC*; de plus le plan *DCF* coupe la pyramide quadrangulaire *DACEF* en deux tétraèdres *DFCA DFCE*. Or, on peut mettre les sommets de ceux-ci en *B*, puisque *DB* est parallèle au plan *ACE* (269). Donc on aura les tétraèdres *BCAF BCEF* : ce dernier peut même prendre *CEA* pour base, puisque les triangles *CEF* et *CEA* sont égaux. Le tronc de prisme est donc formé des trois tétraèdres *DABC FABC EABC* qui ont même base inférieure *ABC*, et leurs sommets aux trois angles trièdres *FDE* de la base supérieure. 157.

Ainsi *le volume du tronc de prisme triangulaire est le produit de sa base par le tiers des hauteurs des angles trièdres de sa base supérieure.* Ce théorème sert à trouver le volume d'un prisme tronqué quelconque.

312. Soient une pyramide et un tétraèdre de même hauteur, de bases équivalentes posées sur le même plan; leurs volumes seront égaux. Un plan parallèle à la base, formera un tronc de pyramide, et coupera le tétraèdre suivant un triangle équivalent à la base de ce tronc : donc la pyramide et le tétraèdre retranchés étant égaux, les troncs le seront aussi.

158. Cherchons donc le volume du tronc de tétraèdre $ABFE$; le plan ADC donne le tétraèdre $DABC$ et la pyramide $DACEF$: le plan DFC forme les tétraèdres $DFEC$ et $DFAC$; or, menant DG parallèle à AF, ce dernier pourra avoir son sommet G au lieu de D, et deviendra $FAGC$. Ces trois tétraèdres ont même hauteur que le tronc; leurs bases sont ABC DFE AGC. Cela posé, on a (256, 2°.) $\frac{ABC}{AGC}=\frac{AB}{AG}$, $\frac{AGC}{FDE}=\frac{AC}{FE}$: or les seconds membres sont égaux à cause des triangles semblables FDE, ABC; donc $\frac{ABC}{AGC}=\frac{AGC}{FDE}$. Ainsi on voit que *le volume de toute pyramide tronquée est composé de trois pyramides de même hauteur que le tronc, et qui ont pour bases, l'inférieure du tronc, la supérieure et une moyenne proportionnelle entre ces deux aires.* Soient A et B les bases du tronc, H sa hauteur, on a donc, pour le volume, $\frac{1}{3}H(A+B+\sqrt{AB})$.

Il est visible que ce théorème a également lieu pour le tronc de cône : soient R et r les rayons des bases, $A=\pi R^2$, $B=\pi r^2$, d'où le volume. . . . . $=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr)$.

145. 313. Faisons tourner autour du diamètre AO le polygone circonscrit $ABDI$....; imaginons le système de pyramides circonscrites de chaque cône tronqué, et formant un polyèdre circonscrit à la sphère. Il est évident que le volume de ces troncs de pyramides, aura pour limite le volume des cônes, et, par conséquent, celui de la sphère, ou du segment sphérique correspondant. Du centre C menons à chaque angle polyèdre des lignes; nous aurons un autre système de pyramides, dont la hauteur commune sera le rayon KC. Le volume entier sera donc le



produit du tiers de ce rayon par la surface des bases ou la surface du polyèdre.

Cela posé, soient R le rayon DC, α l'excès de l'aire du polyèdre sur celle A de la sphère ou de la calotte sphérique DAG, β l'excès du volume du polyèdre sur celui V de la sphère ou du secteur $CDAG$: on a. . . $\frac{1}{3} R\ (A + \alpha)$ pour le volume du polyèdre, donc. . . $V + \beta = \frac{1}{3} R\,(A + \alpha)$; d'où (167), $V = \frac{1}{3} AR$. Donc, 143.

1°. *Le volume de la sphère est le produit de sa surface par le tiers du rayon* ; et comme sa surface $= 4\,\pi\,R^2$, on a

$$\textit{volume V de la sphère} = \tfrac{4}{3}\,\pi\,R^3.$$

2°. Le rayon de la sphère dont le volume V est donné est $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0{,}620355 \times \sqrt[3]{V}$.

3°. *Le volume du secteur sphérique* CDAG *est le produit du tiers du rayon par l'aire de la calotte qui lui sert de base :* x désignant la hauteur AI de cette calotte, on a

$$\textit{secteur sphérique} = \tfrac{2}{3}\,\pi R^2\,x.$$

4°. Le volume du segment sphérique se trouve en retranchant du secteur $CDAG$ le cône $CDIG$ qui est. . . $= \frac{1}{3}\,CI \times$ cercle DI : or, $CI = R - x$, ... $DI^2 = DC^2 - CI^2 = 2Rx - x^2$; ce cône est donc. . . $= \frac{1}{3}\,\pi\,x\ (2R - x)\ (R - x)$; donc enfin

$$\textit{segment sphérique} = \tfrac{1}{3}\,\pi x^2\,(3\,R - x).$$

314. En général, puisque tout polyèdre circonscrit à la sphère a pour volume le produit du tiers du rayon par sa surface, il est à celui de la sphère dans le même rapport que leurs aires. Donc *les volumes de deux*

polyèdres quelconques circonscrits, sont entre eux comme leurs surfaces. La méthode des limites (167) permet de généraliser ce théorème et de l'étendre aussi à tout système formé de portions courbes et planes de surfaces circonscrites à la sphère.

C'est ainsi que *le volume de la sphère est les $\frac{2}{3}$ de celui du cylindre circonscrit*, puisque la surface de l'une est les $\frac{2}{3}$ de celle de l'autre (293, 4°.). C'est, au reste, ce qu'on vérifiera bientôt, en comparant les valeurs de ces volumes qui sont le produit d'un grand cercle, multiplié par $\frac{1}{3}$ du rayon pour la sphère, et par le diamètre pour le cylindre.

126. 315. *Les volumes de deux pyramides sont entre eux comme les produits des hauteurs par les aires des bases* (310); donc si ces pyramides SAC Sac sont semblables, on a $\frac{ABC\ldots}{abc\ldots} = \frac{SH^2}{sh^2}$ (278); multipliant de part et d'autre par $\frac{SH}{sh}$, il vient $\frac{SABC\ldots}{sabc\ldots} = \frac{SH^3}{sh^3}$.

Et comme deux polyèdres semblables $P\,p$ sont décomposables (296) en pyramides semblables $S\,s$, $S'\,s'$,... en désignant par $A\,a$, $A'\,a'$ des lignes homologues de ces pyramides, on a $\frac{S}{s} = \frac{A^3}{a^3}$, $\frac{S'}{s'} = \frac{A'^3}{a'^3}\ldots$ D'ailleurs tous ces rapports sont égaux, puisqu'en vertu de la similitude supposée, on a $\frac{A}{a} = \frac{A'}{a'} = \ldots.$ Donc $\frac{S}{s} = \frac{S'}{s'} = \frac{S''}{s''} = \ldots$ d'où (73, 3°.)

$$\frac{S+S'+S''+\ldots}{s+s'+s''+\ldots} = \frac{P}{p} = \frac{A^3}{a^3};$$

ainsi *les volumes des polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs lignes homologues.*

Il sera aisé de voir que *les volumes des sphères sont entre eux comme les cubes de leurs rayons*; que ceux des cylindres droits semblables sont comme les cubes des longueurs de leurs génératrices. La même chose a lieu pour les cônes droits semblables.

Nous terminerons cette matière par faire remarquer que *les polyèdres symétriques ont leurs volumes égaux*; puisqu'il est évident qu'on peut les décomposer en tétraèdres symétriques, et que ceux-ci ont des bases et des hauteurs égales.

LIVRE QUATRIÈME.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

1. *Quelques Problèmes sur les lignes.*

316. Tant que l'algèbre et la géométrie ont été séparées, leurs progrès ont été lents et leurs usages bornés; mais, lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêté des forces mutuelles, et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. C'est à Descartes qu'on doit l'application de l'algèbre à la géométrie, application qui est devenue la clef des plus grandes découvertes dans toutes les branches des mathématiques. (La Grange, Ecol. Norm., IV p. 401).

C'est donc en introduisant dans des formules algébriques les grandeurs qui composent les parties d'une figure, que nous transporterons dans la géométrie toutes les ressources de l'algèbre; et nous parviendrons sans peine à des résultats qu'il seroit difficile d'obtenir par la géométrie seule. Si nous avons emprunté quelquefois les équations et les formes de l'algèbre, nous ne l'avons fait qu'avec une extrême modération. Cette science a bien plus de ressources que la géométrie, mais celle-ci a l'avantage de ne jamais faire perdre de vue l'objet principal, et d'éclairer la route entière qui conduit des premiers axiomes à leurs dernières conséquences. (*V.* n°. 252).

Ces réflexions conduisent à préférer dans la géométrie élémentaire les méthodes directes, celles qui ne reposent sur aucun principe étranger; et permettent, pour ainsi dire, d'isoler chaque théorème, en le présentant comme une vérité aussi claire que l'axiome d'où il est déduit. Mais, lorsque les questions deviennent plus compliquées, cette méthode, qu'on nomme *Synthèse*, perd cette clarté qui est son plus précieux avantage; l'*Analyse* reprend toute sa supériorité, et par sa féconde influence, généralise les résultats, simplifie les recherches, et lorsqu'elle est employée avec adresse, donne à ses artifices une élégance et même une clarté, à laquelle le mécanisme du calcul sembloit s'opposer. Les problêmes suivans, serviront de preuve à ces assertions.

317. *Mesurer la distance d'un point inaccessible* D, *à un autre point* A. On prendra sur l'alignement AD une partie quelconque AC, et formant un triangle arbitraire ABC, on en mesurera les côtés $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ (*); puis marquant sur BC un point E quelconque, on dirigera vers D le rayon visuel FD : soient $AD=x$, $EC=g$, $FA=d$. La parallèle EG à AB donne 159.

1°. $\frac{BC}{EC}=\frac{CA}{CG}=\frac{AB}{EG}$, ou $\frac{a}{g}=\frac{b}{CG}=\frac{c}{EG}$;

2°. $\frac{DA}{FA}=\frac{DG}{EG}$ ou $\frac{x}{d}=\frac{DG}{EG}$;

donc $CG=\frac{bg}{a}$, $EG=\frac{cg}{a}$,

$$DG=\frac{x}{d}\times EG=\frac{cgx}{ad}.$$

(*) Dorénavant nous désignerons les angles des triangles par A, B, C, et par a, b, c, ... les côtés qui sont respectivement opposés.

159. Or on a $DG=DA-GA=DA-(CA-CG)$, ou . . $DG=x-b+\frac{bg}{a}$; en égalant les valeurs de DG, on trouve,

$$\frac{cgx}{ad}=x-b+\frac{bg}{a},$$

d'où
$$x=bd\left(\frac{g-a}{cg-ad}\right).$$

Il ne s'agira plus que de mettre pour abc... leurs valeurs numériques, ou le nombre de fois que ces lignes contiennent leur unité, pour trouver x exprimé en nombres.

92. 318. Quelle est la relation qui lie les côtés a b et c d'un triangle BAC inscrit à un cercle de rayon R? Menons le diamètre BD; et les lignes AD DC; le quadrilatère $ABDC$ donne (240, III.) $2Rb=c\times CD+a\times AD$. Des triangles rectangles BCD BAD, nous tirons $CD=\sqrt{(4R^2-a^2)}$, $AD=\sqrt{(4R^2-c^2)}$; donc

$$2Rb=c\sqrt{(4R^2-a^2)}+a\sqrt{(4R^2-c^2)},$$

équation cherchée qui donne l'une des quantités a b c et R connoissant les trois autres.

I. C'est ainsi qu'on trouve pour le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

$$R=\frac{abc}{\sqrt{\{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2\}}};$$

cette valeur s'obtient en élevant au carré pour chasser l'un des radicaux; transposant et élevant de nouveau au carré pour faire évanouir l'autre.

92. II. Etant données les cordes de deux arcs AB BC, on peut trouver la corde AC d'un arc ABC égal à leur somme. Si les arcs AB et BC sont égaux, on a $a=c$, d'où

$$Rb = a\sqrt{(4R^2 - a^2)},$$ 92.

équation qui donne la corde b d'un arc, connoissant celle a d'un arc moitié moindre ; on en tire aussi le rayon R d'un cercle circonscrit à un triangle isoscèle donné.

319. Connoissant le côté $AB = a$ d'un polygone régulier inscrit, on trouve celui $AC = x$ d'un polygone régulier dont le nombre des côtés est double, en remarquant que CO, perpendiculaire sur AB, donne (223), $AC^2 = CI \times 2CO$. Représentant par z le rayon OI du cercle inscrit au polygone donné, on a $CI = R - z$, et $OI^2 = AO^2 - AI^2$: donc 97.

$$x^2 = 2R(R - z) \text{ et } z^2 = R^2 - \tfrac{1}{4}a^2.$$

En faisant, par exemple, $a = R$, on a $R\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$ pour le côté du dodécagone inscrit (236). De même $a = R\sqrt{3}$ donne $x = R$ pour le côté de l'hexagone ; ce qui est d'ailleurs connu, etc.

On peut aussi trouver le côté $EF = y$ d'un polygone régulier circonscrit, connoissant celui $AB = a$ qui est inscrit d'un même nombre de côtés. Car $\frac{OI}{OC} = \frac{AI}{EC}$ ou $\frac{z}{R} = \frac{a}{y}$. Donc

$$y = \frac{aR}{z} \text{ et } z^2 = R^2 - \tfrac{1}{4}a^2.$$

C'est ainsi que $a = R\sqrt{2}$, donne $z = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$ et $y = 2R$ pour le côté du carré circonscrit (237) ; $a = R\sqrt{3}$ donne pour le côté du triangle équilatéral circonscrit, $y = 2R\sqrt{3}$; ou le double du côté du triangle inscrit.

320. Il est facile de déduire de ces formules *le rapport approché du diamètre à la circonférence*, ou la demi-

97. circonférence π du cercle dont le rayon est l'unité (248). Pour cela, posons $R = 1$: (*V.* n°. 350), nos équations deviendront

$$x = \sqrt{(2 - 2z)},$$
$$z = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}a^2)},$$
$$y = \frac{a}{z}.$$

faisant $a = 1$, on a pour le côté du dodécagone inscrit $x = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 0{,}5176....$ Si de nouveau on fait $a = 0{,}5176....$ on trouvera $x = 0{,}2610....$ pour le côté du polygone régulier inscrit de 24 côtés. Et ainsi de suite.

Quatre opérations semblables donneront, par exemple, 0,0654.... pour le côté du polygone régulier de 96 côtés; en mettant cette valeur pour a dans z et y, on a le côté du polygone régulier circonscrit semblable; et multipliant par 48, on a pour les demi-périmètres de ces polygones 3,1392 et 3,1410. Comme la demi-circonférence π est comprise entre ces longueurs, on aura donc $\pi = 3{,}14...$ en ne prenant que les décimales communes.

Pour obtenir une plus grande approximation, comme la circonférence approche d'autant plus des périmètres des polygones, que l'on multiplie davantage les côtés (246), il faudra recourir à des polygones d'un plus grand nombre de côtés. Soit en général calculé le côté a d'un polygone inscrit d'un nombre n de côtés, on aura pour les demi-périmètres de ce polygone et de celui qui est circonscrit semblable

$$\tfrac{1}{2}an \text{ et } \frac{\tfrac{1}{2}an}{\sqrt{\{(1 + \tfrac{1}{2}a)(1 - \tfrac{1}{2}a)\}}},$$

C'est ainsi qu'Archimède a trouvé $\pi = \frac{22}{7}$, Adrien Métius $\pi = \frac{355}{113}$: ce dernier rapport, exact jusqu'à la 6e,

décimale, est sur-tout remarquable en ce qu'il est formé 97·
des trois premiers nombres impairs écrits deux fois, 113 355. Nous donnerons (581) des moyens plus rapides de calculer π avec une plus grande approximation : voici la valeur de ce rapport, ainsi que son logarithme.

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279$$
$$L\,\pi = 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 342.$$

2. *Des Constructions géométriques.*

321. L'art de résoudre les problèmes de géométrie, consiste, comme on l'a pu remarquer (208, 227,...), à les supposer résolus; à rapprocher les propriétés de la figure de celles qu'on connoît et qui sont analogues; à lier ainsi les parties du système par une loi; et à en conclure les inconnues. Ces procédés exigent beaucoup d'exercice et de finesse, parce qu'on ne peut donner de règle générale pour les combiner. Nous allons donc essayer l'emploi de l'algèbre : lorsque le choix des inconnues est fait avec adresse, on obtient souvent des solutions plus élégantes; on sait mieux reconnoître leur nombre, et on juge facilement si le problême, est possible ou non, déterminé ou indéterminé.

Concevons qu'après avoir supposé le problême résolu, on ait représenté les parties de la figure par des lettres : alors faisant usage des principes élémentaires connus, on les lie par des équations, qui servent à trouver la valeur des inconnues. Il s'agira ensuite d'assigner leur longueur par des procédés géométriques qui auront d'autant plus d'élégance qu'ils seront plus simples et donneront une figure moins confuse : c'est ce qu'on appelle construire la valeur des inconnues. Nous développerons bientôt tout ceci par des exemples.

97. 322. Toute *fraction monome* proposée ne peut être que de la forme $x=\frac{ab}{c}$, $x=\frac{abc}{de}$, $x=\frac{abcd}{efg}$,... car chaque lettre du numérateur, comparée à l'une du dénominateur, forme une fraction qui n'est qu'un nombre abstrait : ainsi $\frac{abcd}{efg}$ équivaut à $\frac{a}{e}\times\frac{b}{f}\times\frac{c}{g}\times d$; de sorte qu'on voit que la ligne d doit être prise autant de fois qu'il y a d'unités dans le produit des rapports $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{f}$, $\frac{c}{g}$.

59. 1°. La construction de $x=\frac{ab}{c}$ n'offre pas de difficulté; x est une quatrième proportionnelle à c, a et b. On sait la trouver (213); on pourroit même faire usage des théorèmes (221 et 224).

59. 2°. Pour $x=\frac{abc}{de}$, on cherchera une ligne $k=\frac{ab}{d}$ et on aura $x=\frac{kc}{e}$; ainsi deux 4es. proportionnelles donneront x.

3°. De même $x=\frac{abcd}{efg}$ se construit en faisant $k=\frac{ab}{e}$, $l=\frac{cd}{f}$, et on a $x=\frac{kl}{g}$. Il faut trois constructions.

Et ainsi de suite.

323. Lorsque la *fraction est polynome* comme .... $x=\frac{abc+def-ghi}{lm}$, le numérateur étant monome, on écrit $x=\frac{abc}{lm}+\frac{def}{lm}-\frac{ghi}{lm}$; on construit chaque fraction à part, et on a trois lignes à ajouter ou soustraire.

Cependant si on a $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$, il sera plus court de faire $x = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$, c.-à-d. de chercher une 4e. proportionnelle aux lignes c, $a+b$ et $a-b$.

Remarquons que la valeur de x doit toujours avoir un facteur de plus dans chaque terme du numérateur que dans le dénominateur : on décomposera x en plusieurs fractions, et on construira chacune.

324. Si le dénominateur est complexe, tel que dans $x = \frac{abc + def}{ab + cd}$, on le rend monome en l'égalant à un seul terme dont on prend tous les facteurs à volonté, excepté l'un qui est inconnu ; ici on fera $ab + cd = ay$; d'où $y = b + \frac{cd}{a}$. On remarque que les deux membres doivent renfermer le même nombre de facteurs. On a donc $x = \frac{abc + def}{ay}$, d'où $x = \frac{bc}{y} + \frac{def}{ay}$, et comme y est maintenant connu, il n'y a plus de difficultés.

Pour $x = \frac{abc^2 + q^3h - m^3p}{q^2i - klq + cmd}$, on fera le dénominateur $q^2i - klq + cmd = q^2y$; d'où on tire . . . .
$y = i - \frac{kl}{q} + \frac{cmd}{q^2}$; une fois y connu on a

$$x = \frac{abc^2}{q^2y} + \frac{qh}{y} - \frac{m^3p}{q^2y}.$$

Le choix des facteurs de l'inconnue y se fait quelquefois de manière à rendre les constructions plus simples ; un peu d'adresse et d'exercice facilite l'application du principe général : ainsi $x = \frac{abc^2 - a^2b^2}{abc + c^3}$ devient . . . .
$x = \frac{m(c-m)}{c+m}$, en faisant $m = \frac{ab}{c}$.

70. 325. Les *Constructions radicales* se ramènent à la forme

$$\sqrt{(ab)} \text{ ou } \sqrt{(a^2 \pm b^2)}:$$

$\sqrt{(ab)}$ est une moyenne proportionnelle entre a et b; on la construit comme il a été dit (222), on pourroit aussi la trouver à l'aide des théorèmes (223, 225).

67. Quant à $\sqrt{(a^2 \pm b^2)}$, c'est un côté d'un triangle rectangle dont a et b sont les autres côtés. Pour $\sqrt{(a^2+b^2)}$, on prendra $AB=a$, $AC=b$ sur deux lignes indéfinies AB BC à angle droit; l'hypothénuse BC est $\sqrt{(a^2+b^2)}$. De même, pour $\sqrt{(a^2-b^2)}$ on tracera comme ci-dessus les lignes AB et AC, on prendra $AB=b$, puis du centre B avec le rayon $BC=a$, on marquera le point C, AC sera $\sqrt{(a^2-c^2)}$. Ou autrement surla ligne $BC=a$ comme diamètre, on décrira le demi-cercle ABC; puis du centre B avec le rayon $AB=b$, on marquera le point A, AC sera $\sqrt{(a^2-c^2)}$.

326. Pour construire toute quantité affectée d'un radical, on égalera cette quantité à un produit ay; a étant une quantité qu'on choisira à volonté, et y une inconnue: on aura alors $x=\sqrt{(ay)}$. La valeur de y se déduira aisément et se construira par les principes ci-dessus. Il en résulte que la quantité radicale est formée de termes qui ont deux facteurs, ou d'une fraction qui a deux facteurs de plus au numérateur qu'au dénominateur.

Soit par exemple $x=\sqrt{\left(\frac{ab^2+cd^2}{b+c}\right)}$, on fera $\frac{ab^2+cd^2}{b+c}=ay$, d'où $y=\frac{b^2}{b+c}+\frac{cd^2}{a(b+c)}$; on construira y par une 3e. et deux 4es. proportionnelles: enfin on aura $x=\sqrt{(ay)}$.

Au reste le procédé général se simplifie souvent avec un peu d'adresse; ainsi pour $\sqrt{(ac+bd)}$ on fera

$bd = ay$ d'où $y = \frac{bd}{a}$ et $x = \sqrt{a(c+y)}$. De même 67.
$x = \sqrt{ab + bc}$ devient $x = \sqrt{(a + c)b}$. Voy. aussi (329, VI) la construction de $\sqrt{\left(\frac{nA^2}{m}\right)}$, etc.

327. Quoiqu'on puisse construire par cette voie... $x = \sqrt{(a^2 \pm b^2)}$, cependant la construction du triangle tangle donne une solution plus simple : c'est pourquoi il arrive souvent qu'on ramène à cette forme les quantités radicales. Ainsi, $x = \sqrt{(a^2 \pm bc)}$ devient $x = \sqrt{(a^2 \pm y^2)}$, en faisant $y^2 = bc$ d'où $y = \sqrt{(bc)}$. Une moyenne proportionnelle et un triangle rectangle donnent x.

De même $x = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 ...)}$ se construit ainsi. On 160.
fait $y = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; sur les côtés AB BC de l'angle droit B, on prend $AB = a$, $BC = b$; l'hypothénuse AC est y. On a $x = \sqrt{(y^2 + c^2 + d^2 + ...)}$; on fait $y' = \sqrt{(y^2 + c^2)}$: ainsi, sur DC perpendiculaire à AC, on prend $CD = c$, et AD est y', d'où $x = \sqrt{(y'^2 + d^2 + ...)}$, et ainsi de suite. La dernière hypothénuse AF est x. Voyez pour la construction de $\sqrt{n}$ et $\sqrt{\frac{m}{n}}$, n°. 329, VI et VIII.

Pour $x = \sqrt{(ac - fg + mq + rd)}$, on fera indifféremment ou $ac - fg + mq + rd = ay$,

d'où $y = c - \frac{fg}{a} + \frac{mq}{a} + \frac{rd}{a}$ et $x = \sqrt{(ay)}$;

ou bien $ac = y^2$, $fg = z^2$, $mq = t^2$, $rd = u^2$, d'où $x = \sqrt{(y^2 - z^2 + t^2 + u^2)}$; et la construction précédente convenablement modifiée donnera x.

Enfin si on a $x = \sqrt{\left(a^2 - f^2 \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}\right)}$, on fera $y^2 = f^2 \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}$, d'où $x = \sqrt{(a^2 - y^2)}$: il ne restera

160. plus qu'à obtenir y. On fera $c^2+d^2=z^2$ et $ab+cd=t^2$; z et t se trouveront aisément, et on aura $y=\frac{fz}{t}$.

328. Il suit de la manière dont les calculs entrent dans les problêmes, et dont ils conduisent aux résultats, que la quantité proposée doit toujours être *homogène*, c.-à-d. formée de termes qui ont tous le même nombre de facteurs, si ce n'est dans le cas où *on a pris une lettre pour unité* : car alors cette lettre disparoît comme facteur. Ainsi, lorsqu'on a une quantité telle que . . $\frac{a^3+b}{a^2+c}$, $\frac{2a^4c+ab^3-d}{b^4+a^3-c}$, . . . on doit pouvoir rétablir le facteur $r=1$ partout où il manque pour rendre la fonction homogène. Ainsi les proposées reviennent à $\frac{a^3+br^2}{a^2+cr}$, $\frac{2a^4c+ab^3r-dr^4}{b^4+ra^3-cr^3}$, qui sont aisées à construire.

En général, le degré d'une formule homogène s'évalue d'après le nombre des facteurs de chacun de ses termes, si elle est entière; ou en retranchant le degré du dénominateur de celui du numérateur, si c'est une fraction; ou enfin en divisant le degré de la fonction par celui du radical, si elle en est affectée. Comme les formules du premier degré sont construites par une ligne, on les nomme de *Première dimension;* celles du second et du troisième degré sont dites de *Seconde et troisième dimension*, parce qu'elles représentent une surface ou un volume (341).

329. Appliquons ces principes à quelques exemples.

161. I. *Partager une longueur* AC *en deux parties* CB AB *qui soient entre elles dans un rapport donné* $=\frac{m}{n}$. Soient

$AC = a$, $CB = x$; on a $AB = a - x$ et $\frac{x}{a-x} = \frac{m}{n}$ 161.
d'où $x = \frac{am}{m+n}$. Sur une ligne quelconque EC on prendra $CD = m$, $ED = n$, si m et n sont des lignes; si ce sont des nombres, on portera une ouverture de compas arbitraire m fois de C en D, et n fois de D en E. On mènera AE et sa parallèle BD; B sera le point cherché.

II. Etant données deux parallèles BC DE et un point 162.
A, mener par ce point une oblique AI, telle que la partie IK comprise entre les parallèles soit de longueur donnée $= c$. Menons AG perpendiculaire sur DE, et faisons $AG = a$, $FG = b$, l'inconnue $GI = x$; on a $\frac{AI}{AG\ (a)} = \frac{IK\ (c)}{FG\ (b)}$, d'où $AI = \frac{ac}{b} = \sqrt{(a^2 + x^2)}$; ainsi $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{(c^2 - b^2)}$. On voit d'abord que le problème est impossible quand b est $> c$, ou $FG > IK$. Pour construire cette valeur, du centre F on décrira l'arc HH' avec le rayon c, GH sera $\sqrt{(c^2 - b^2)}$; AI parallèle à FH sera la ligne cherchée, puisqu'on voit que IG est 4e. proportionnelle à b, a et GH.

Il y a une seconde solution en AI'; c'est ce qu'indique le double signe de la valeur de x (V. n°. 332).

III. *Etant donnés deux points* A *et* B, *et une droite* DD', 163.
décrire un cercle qui passe par ces deux points et soit tangent à la droite. Il suffit de trouver le point D de contact. Soit donc prolongée la ligne AB en C, et fait $CD = x$, $CI = a$, $IB = b$, I étant le milieu de AB. La tangente CD donne (225), $x^2 = CA \times CB = (a - b)(a + b)$ d'où $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Sur l'hypothénuse CI, on tracera le triangle rectangle dont b et x sont les côtés de l'angle

163. droit, en décrivant le demi-cercle CEI, prenant $EI=AI$; CE sera $x=CD$. Il y a une 2ᵉ. solution en D', à cause de la valeur négative de x (332).

79. IV. *Couper la ligne* AC *en moyenne et extrême raison* (227, VI). Soit $AC=a$, $BC=x$, $AB=a-x$: on a par condition $x^2=a(a-x)$, d'où $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}a^2)}$. Pour construire cette valeur, on élevera $AD=\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}AC$ perpendiculaire sur AC; DC sera $\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}a^2)}$: puis portant AD de A en E, EC sera x. Il suffira donc de faire $BC=EC$, B sera le point cherché. Voyez n°. 332 l'explication de la valeur négative de x. Cette construction est d'accord avec ce qu'on connoît.

164. V. Deux parallèles AE' BF et leur perpendiculaire AB étant données, mener une sécante EF, telle que AC, moitié de AB, soit moyenne proportionnelle entre les segmens AE BF. Soient $AE=x$, $BF=y$, $AC=a$; on a $a^2=xy$: le problème est donc *Indéterminé* (116) et le nombre de solutions infini. Parmi les diverses manières de les obtenir, la suivante est assez élégante.

Soit $CD=r$, D étant le point de rencontre de la ligne cherchée EF, avec CD perpendiculaire sur AB en son milieu C; II' perpendiculaire à CD donne les deux triangles égaux EDI $I'DF$; ainsi $y=r+IE$, $x=r-IE$, d'où $x+y=2r$. Eliminant y de $a^2=xy$, on a $x^2-2rx=-a^2$; r est ici arbitraire, et on a $x=r\pm\sqrt{(r^2-a^2)}$. On devra donc prendre le point D tel que r soit $>a$, ou $CD>AC$: le cercle décrit du centre D avec le rayon r donne . . . $EI=\sqrt{(r^2-a^2)}$; donc les points E et F d'intersection satisfont à la condition, ainsi que E' et F'. Chaque centre D donne ainsi deux solutions.

165. VI. *Par le point* A *mener une corde* BAD *dont les segmens* BA AD *aient entre eux un rapport donné* $=\frac{m}{n}$.

Menons le diamètre HAG; soit $CH=r$, $CA=b$, $AD=x$: 165.
on a $HA\times AG=BA\times AD$, d'où $r^2-b^2=x\times BA$; mais
par condition $BA=\frac{mx}{n}$, donc $\frac{mx^2}{n}=r^2-b^2$. Faisons donc $r^2-b^2=k^2$, nous aurons $x=\sqrt{\frac{nk^2}{m}}$,
quantité facile à construire : on pourroit lui donner la
forme $x=\frac{k}{m}\sqrt{(mn)}$, et on auroit à trouver une 4ᵉ.
et une moyenne proportionnelle ; mais on doit préférer
le procédé suivant. Remplaçons le rapport de $\frac{n}{m}$ par 166.
celui de deux carrés : pour cela, sur une ligne indéfinie, prenons DF et FE tels qu'on ait $\frac{DF}{FE}=\frac{m}{n}$;
décrivons le demi-cercle DAE, puis menons AF perpendiculaire sur DE, et les cordes AD AE, on aura
$\frac{AD^2}{AE^2}=\frac{DF}{FE}=\frac{m}{n}$ (223) ; ainsi $x=\frac{k\times AE}{AD}$:
on prendra donc $AB=k$ sur AD, prolongé s'il est
nécessaire ; BC parallèle à DE donnera $AC=x$, (213).

VII. Mener par le point A la corde BD dont la longueur 165.
soit donnée $=c$. Conservons les mêmes dénominations,
nous aurons encore r^2-b^2 ou $k^2=x\times BA$; de plus par
condition $BA=c-x$, ainsi $k^2=(c-x)x$, ce qui rentre
dans le problême V.

VIII. Pour construire $\sqrt{n}$, on peut prendre une moyenne
proportionnelle (222) entre n et 1. On remarque (236, 237)
que si on décrit le cercle qui a l'unité pour rayon, en y
inscrivant un carré et un triangle équilatéral, leurs côtés
sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Quant à $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$,... la construction
(327) s'applique à cette recherche; car, sur l'angle droit

160. CBA, prenons $AB=2$, $CB=1$, on aura $AC=\sqrt{5}$. De même, $CD=1$, donne $AD=\sqrt{6}$, etc.

IX. L'équation du second degré $x^2+px=q$, suppose une ligne r prise pour unité (328); il faudroit donc remplacer q par qr, ou plutôt par m^2 en faisant $m^2=qr$. Cherchons donc à construire les racines de $x^2 \pm px = \pm m^2$. On pourroit employer les moyens généraux, et construire $x=-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(m^2+\frac{1}{4}p^2)}$; mais on peut aussi exécuter les constructions suivantes.

167. 1°. Si on a $x^2-px=-m^2$, comme $m^2=x(p-x)$, m est moyen proportionnel entre x et $p-x$. Si donc on élève $AD=m$ perpendiculaire sur $AB=p$, puis si on décrit la demi-circonférence AEB sur le diamètre AB; DE' parallèle à AB donne les points $E\,E'$ pour lesquels la perpendiculaire EF ou $E'F'$ est moyenne proportionnelle entre les segmens du diamètre. Les deux racines sont donc $x=AF$ et $x=AF'$.

79. 2°. Si on a $x^2-px=m^2$, comme m est moyen proportionnel entre x et $x-p$; avec le rayon $AD=\frac{1}{2}p$, on décrira le cercle AEE', puis prenant sur la tangente une longueur $AC=m$, la sécante CE' passant par le centre donne $x=CE'$ et $=-CE$, puisque $m^2=CE\times CE'$

3°. Si on a $x^2+px=\pm m^2$, on fera la même construction que dans les cas précédens; seulement les racines ont changé de signe, puisqu'il suffit de changer x en $-x$ pour retomber sur les équations déja traitées.

3. *Sur les Signes des quantités, dans l'algèbre appliquée à la géométrie.*

330. Lorsque deux figures géométriques ne diffèrent l'une de l'autre que par la grandeur de leurs parties, qui y sont d'ailleurs disposées dans le même ordre, on dit que ces figures sont *Directes*. Si les quantités b, c, d.... x

qui composent la première sont liées par une équation $X = 0$, elle a également lieu pour la seconde. Mais si 72.
les deux figures diffèrent par la disposition de quelques-unes de leurs parties, de sorte que, par exemple, on ait $x = a - b$ dans la première, et $x = b - a$ dans la seconde, on dit alors qu'elles sont *Indirectes* (*). L'équation $X = 0$ qui a lieu pour l'une, peut avoir besoin de quelques modifications pour devenir applicable à la seconde; c'est ce qu'il s'agit d'examiner.

On a vu (218) qu'en nommant x le segment AD ou $A'D$ 38.
formé par la perpendiculaire BH sur la base du triangle ABC ou $A'BC$, on a, en désignant les côtés (317) par $a\ b\ c$,

$$BD^2 = c^2 - x^2 = a^2 - DC^2 \ldots . (1).$$

en mettant pour DC sa valeur $AC - AD = b - x$ ou $A'D + A'C = b + x$, on trouve.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx \text{ ou } a^2 = b^2 + c^2 + 2bx \ldots (2)$$

Les deux fig. ABC et $A'BC$ sont indirectes puisque $x = b - DC$ dans l'une, et $x = DC - b$ dans l'autre : chacune des formules (2) n'est directement applicable qu'à l'une d'elles. Mais la formule (1) appartenant à l'une et à l'autre, la substitution de la valeur de DC y a seule introduit des différences; il est visible qu'elles ne consistent que dans le signe de x : donc l'une doit se déduire de l'autre en changeant x en $-x$.

En général, Si $X = 0$ et $X' = 0$ sont deux équations entre les quantités $b, c, d \ldots x$ qui composent deux figures

(*) *Carnot*, qui est l'auteur de cette théorie, qu'il a développée dans sa *Géométrie de position*, nomme *corrélatives directes* les figures directes et *corrélatives inverses* les figures indirectes. Consultez cet excellent ouvrage.

indirectes, $X = o$ ayant lieu pour l'une, et $X' = o$ pour l'autre ; il faut qu'il y ait au moins une ligne, telle que x, qui soit la somme dans la première figure et la différence dans la seconde de deux autres b et a : de sorte que $x = a - b$ pour l'une et $x = b - a$ pour l'autre. Or, on peut toujours concevoir une 3ᵉ. équation $Y = o$, vraie pour l'une et l'autre, et telle qu'on en déduise $X = o$ ou $X' = o$, suivant qu'on y mettra $b + x$ ou $b - x$ pour a.

Or, ces valeurs de a ne différant que par le signe de x, X et X' doivent se déduire l'un de l'autre en changeant x en $-x$. S'il y avoit plusieurs quantités indirectes, il faudroit en dire autant de chacune d'elles. Il ne reste plus qu'à indiquer les moyens de reconnoître ces quantités.

Si on fait varier la position des points de la seconde figure pour la rendre directe avec la première, en comparant les deux valeurs de x, on voit que a a dû devenir $> b$, de $< b$ qu'il était ; et comme la variation s'est faite en suivant la loi de continuité, il faut qu'on ait eu $a = b$: ainsi x a dû devenir nul.

38. Par exemple, si le point A se meut vers D et dépasse ce point, afin que la figure ABC, soit rendue directe avec celle $A'BC$, AD ou x a été nul lorsque A a passé sur D.

Il pourroit arriver que la valeur de x fût $x = \frac{A}{a-b}$ pour l'une des figures et $x = \frac{A}{b-a}$ pour l'autre, alors x auroit passé par l'infini. *C'est donc le propre des quantités indirectes de ne pouvoir être rendues directes par le mouvement continu des parties de l'une, sans se trouver dans l'intervalle devenir zéro ou infini.*

Lors donc qu'on a une équation X = o *entre les lignes* b c..... x *d'une figure, pour obtenir celle* X' = o *qui convient*

à une figure indirecte, il faut simplement changer le signe des quantités indirectes. Pour les distinguer, il faut faire mouvoir les lignes de l'une des figures, pour la rendre directe avec l'autre, et examiner si quelqu'une des lignes b c..... x *passe par zéro ou par l'infini, car celles-ci peuvent seules être indirectes.*

Mais ce caractère ne suffit pas pour en conclure si les lignes sont indirectes ; car elles peuvent le présenter et être cependant directes. Il faut en outre obtenir dans l'une et l'autre, à l'aide des notions connues et de la forme de la figure, des relations, qui, comparées entre elles, fassent distinguer les quantités indirectes; car elles entrent avec des signes contraires. C'est ainsi qu'après 38.
avoir reconnu que AD ou $A'D = x$ devient zéro, on doit ensuite tirer les valeurs de CD qui sont $AC - AD$ pour ABC et $A'C + A'D$ pour $A'BC$; car on voit que AD ou x a le signe différent de $A'D$.

331. Pour mieux concevoir ce théorème, faisons-en 168.
l'application au problème suivant. Etant donnée une corde AD, du point O, extrémité du diamètre OB qui lui est perpendiculaire, mener une droite OE, telle que la partie FE, comprise entre la corde et l'arc, soit de longueur donnée. Soient $AB = a$, $BO = b$, $FE = m$ et $OF = x$; nous aurons $OF \times FE = AF \times FD$, ou $mx = (a + BF)(a - BF)$: or, $BF^2 = x^2 - b^2$; donc $mx = a^2 + b^2 - x^2$, d'où

$$x = -\tfrac{1}{2} m \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + \tfrac{1}{4} m^2)} ;$$

l'une de ces solutions est positive ; elle n'offre aucune difficulté et se construit aisément : pour interpréter l'autre, changeons x en $-x$, nous aurons. . . . .
$mx = x^2 - a^2 - b^2 = BF^2 - a^2$, ce qui suppose $BF > a$ ou BD. Faisons donc tourner OF jusqu'en OF' ; on voit

168. qu'alors $a\ b\ x$ sont demeurés directs ; mais lorsque OF passe en D, FE et FD sont rendus nuls ; de plus. . . $FD = BD - BF$ et $F'D = BF' - BD$: donc $F'D$ est indirecte par rapport à FD. Il en est de même de $F'E' = m$, car on a (221, 224), $FE = \frac{AF \times FD}{FO}$, $F'E' = \frac{AF' \times F'D}{F'O}$, ou FD et $F'D$ sont seuls indirectes. Donc la solution qui convient à la nouvelle figure se trouve en changeant ici m en $-m$, ou ce qui revient au même x en $-x$.

La question admet donc deux solutions à droite de OB (et par conséquent deux à gauche), l'une est donnée par la racine positive, l'autre par la racine négative, qu'on prend en signe contraire (*). Du reste, il pourroit arriver que la question proposée n'admît pas les solutions indirectes ; c'est ce qui a lieu lorsque le problème exige que FE soit pris dans le cercle et non au-dehors : alors les solutions négatives deviennent insignifiantes. On en a eu un exemple (329, IV).

On expliquera de même les solutions négatives des problèmes VI et VII (329).

332. Il est un genre de problèmes qui se rapportent à cette théorie et qui méritent de nous arrêter.

169. Supposons qu'il faille déterminer, d'après des conditions données, un point B sur une ligne fixe CB : pour cela, on prendra un point arbitraire A, qu'on nomme

(*) Cet exemple prouve que le nombre des solutions d'une question n'est pas toujours donné par le degré de l'inconnue ; pour n'en omettre aucune, il faut faire varier la figure, la comparer avec toutes ses indirectes, en laissant toujours les données fixes. *Voy.* le problème 337, 4°.

Origine, et on cherchera la distance $AB = x$ entre ces 169.
deux points. Il peut arriver que l'équation $X = 0$, qui renferme les conditions du problème, admette une solution négative $x = -a$; il s'agit d'expliquer ce résultat.

Il suit de ce qu'on a vu que $x = a$ répond au problème proposé, en y supposant cependant que x devienne indirecte : or, si le point B se meut vers C pour se placer en B', AB sera nul lorsque B tombera sur A; ensuite AB deviendra indirecte; car $AB = CB - CA$ et $AB' = CA - CB'$. Si donc rien n'indique dans le problème que le point cherché soit situé à droite de l'origine A, il est clair que la distance $x = a$, portée de A en B', c'est-à-dire à gauche, y satisfait. On voit même que la solution négative $x = -a$, indique dans $X = 0$ une absurdité, qui provient de ce que, pour obtenir cette équation, on a supposé le point cherché placé en B, à droite de l'origine; position contradictoire à celle que la question comporte, puisqu'on a donné à la figure hypothétique sur laquelle on a obtenu l'équation $X = 0$, une forme indirecte de celle qu'elle devoit affecter réellement. Cette erreur est rectifiée en plaçant B à gauche de A en B'.

On doit conclure de là que *toutes les fois que le but d'un problème est de trouver sur une ligne fixe la distance d'un point inconnu à l'origine, il faut supprimer le signe des solutions négatives que donne le calcul, et en porter les valeurs en sens opposé à celui où on les avoit placées pour obtenir l'équation.*

C'est ce qu'on a pu remarquer dans le problème 162.
(329, II), où on a porté aussi l'inconnue GI de G en I'.
De même pour le problème III, on a pris $CD' = CD$, 163.
et D' a été un nouveau point de contact du cercle avec la droite DD', etc.

Quant à la solution négative du problème IV, ...
79· $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}a^2)}$, elle donne $x = -CE'$; il fandroit donc porter CE' sur CA, mais à droite, ce qui ne peut convenir à la question (qui consiste à couper CA en moyenne et extrême raison) ; cette racine est donc insignifiante.

Résolvons encore ce problème.

169. Sur une ligne AC, quel est le point B' dont les distances aux points fixes A et C, donnent le produit m^2. Soit $AC = a$, $CB' = x$, on a $AB' = a - x$, d'où

$$x(a - x) = m^2 \text{ et } x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - m^2)}.$$

Il sera facile de construire cette solution qui est double (329, IX). Si $m > \frac{1}{2}a$, elle devient imaginaire ; mais il ne faut pas en conclure qu'il y ait absurdité dans la question, car l'erreur peut provenir de ce qu'on a attribué au point cherché B' une position qui ne lui convenoit pas. Plaçons-le donc en B hors de l'espace AB, alors $CB = x$, donne $AB = x - a$, puis

$$x(x - a) = m^2 \text{ et } x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + m^2)}.$$

Il en resulte que 1°. si la question exige que le point soit situé hors de AB, elle n'est jamais absurde, et ses deux solutions sont l'une en B, l'autre en E ; celle-là provient de la racine positive et celle-ci de la négative $EC = AB$.

2°. Si la question exige que le point soit situé entre A et C, elle est absurde, à moins que m ne soit . . . . $< \frac{1}{2}AC$: c.-à-d., que le plus grand rectangle qu'on puisse faire avec les deux parties de AC est le carré de sa moitié. On remarquera sur-tout que l'absurdité indiquée par le symbole imaginaire, résulte précisément d'une erreur de position du point B, analogue à celle qui con-

duit ordinairement aux solutions négatives ; ce qui jette 169. un grand jour sur la théorie que nous avons développée.

3°. Enfin, si la question laisse la liberté de placer le point cherché entre A et C ou en dehors, elle admet deux ou quatre solutions suivant que $\frac{1}{2}a$ est $<$ ou $>$ m. Dans ce dernier cas, le nombre des solutions n'est point donné par le secours de l'algèbre seule, ou plutôt l'algèbre donne en effet tout ce qu'elle doit donner, puisqu'elle ne rend que ce qu'on lui a confié : il ne faut donc que savoir interpréter son langage.

333. Pour déterminer la situation d'un point M sur 170. un plan, on emploie souvent le procédé suivant. On trace deux droites quelconques Ax Ay, et, par le point M, on mène les parallèles MQ MP à ces lignes ; soient $MQ = x = AP$, $MP = y = AQ$: si ces longueurs sont données, le lieu du point M sera connu, puisqu'en prenant $AP = x$, $AQ = y$, chacune des lignes PM QM, parallèles à Ay Ax, devra contenir ce point; il sera donc à leur intersection. Si $y = 0$, le point est situé sur Ax; il est sur Ay lorsque $x = 0$: enfin pour le point A, x et y sont nuls.

Il est vrai que rien ne disant *a priori* si le point est placé dans l'angle yAx, plutôt que dans ceux yAx', $y'Ax$ ou $x'Ay'$, la longueur x auroit pu être portée en AP', et de même y en AQ' : de sorte que les quatre points M N M' N' satisfaisant aux conditions données, il y auroit indécision entre eux. Mais la distance AP' étant prise en sens contraire de AP, il suit de ce qu'on a dit ci-dessus, que ces deux valeurs doivent entrer dans les calculs avec un signe contraire : si l'une est $+x$, l'autre sera $-x$; de même si AQ est $+y$, AQ' sera $-y$. Nous supposerons dorénavant que les x positives sont

170. comptées de A vers la droite et les y positives de A vers la partie supérieure. Ainsi pour les points situés dans

L'angle yAx, *tel que* M, x *et* y *sont positifs.*
L'angle yAx', *tel que* N, x *est négatif et* y *positif.*
L'angle y'Ax, *tel que* M', x *est positif et* y *négatif.*
L'angle x'Ay', *tel que* N', x *et* y *sont négatifs.*

La distance $AP = x$ s'appelle *Abscisse ; PM* $= y$ est l'*Ordonnée* ou *Appliquée* ; l'assemblage de ces deux lignes est nommé *Coordonnées* ; Ax et Ay sont les *Axes*, A est l'*Origine*.

L'angle xAy des cordonnées est le plus souvent *droit* ; alors les lignes x et y étant perpendiculaires aux axes, sont les distances du point M à ces droites, ce qui simplifie le discours et facilite les constructions.

4. *Quelques Problèmes sur les aires.*

334. *Un polygone étant donné, construisons-en un autre qui lui soit semblable, leurs aires étant entre elles dans un rapport connu* $= \frac{m}{n}$, (m et n étant des lignes ou des nombres). Nommons A l'un des côtés du polygone donné, et a son homologue inconnu : les aires de ces figures étant d'une part $= \frac{m}{n}$ et de l'autre $= \frac{A^2}{a^2}$ (262), on a $\frac{A^2}{a^2} = \frac{m}{n}$. La construction de la formule

165. $a = A\sqrt{\frac{n}{m}}$ est donnée (329, VI). Connoissant a, il ne restera plus qu'à former le polygone semblable au proposé, a étant homologue à A (241). La même construction a lieu également pour des cercles (263, 3°.).

93. 335. *Pour trouver le rapport de deux figures semblables*

données ABC...... abc...... on prendra sur les côtés d'un angle droit DAE deux parties AB AC égales aux deux côtés homologues, la droite BC sera coupée par sa perpendiculaire AG en deux segmens BG CG, qui ont le même rapport que les figures proposées. 166.

336. *Cherchons une figure* X *qui soit semblable à une autre* P, *et égale à une troisième* Q ; P et Q étant donnés. Soient A un côté de P et a son homologue inconnu, $\frac{P}{X} = \frac{A^2}{a^2}$ devient $\frac{P}{Q} = \frac{A^2}{a^2}$, parce que $X = Q$. On cherchera donc les côtés M et N des carrés équivalens à P et Q (257), ou deux carrés M^2 et N^2 qui soient entre eux dans le même rapport (Fig. 166), et on aura $\frac{A}{a} = \frac{M}{N}$; a sera donc 4e. proportionnelle à N, M et A.

337. *Diviser un triangle* ABC *en deux parties qui soient entre elles dans un rapport connu* $= \frac{m}{n}$.

1°. *Par une ligne* FE *perpendiculaire à la base* AB. 171.
Soient b x les bases AB AE des triangles ABC AEF, h y leurs hauteurs CD EF; leurs aires sont $\frac{1}{2}bh$ $\frac{1}{2}xy$, d'où $FEBC = \frac{1}{2}(bh - xy)$: ainsi la condition prescrite donne $\frac{xy}{bh - xy} = \frac{m}{n}$. Les triangles semblables AEF ACD donnent $\frac{y}{x} = \frac{h}{a}$, en faisant $AD = a$; éliminant y on trouve

$$\frac{x^2}{ab - x^2} = \frac{m}{n} \text{ d'où } x = \sqrt{\frac{mab}{m+n}}.$$

Si on trouvoit $x > a$ ou $> AD$, le point E devroit

171. être placé vers H, de l'autre côté de D; c'est ce qui a lieu quand $\frac{m}{n}$ est $> \frac{a}{b-a}$ ou $\frac{AD}{DB}$.

2°. *Par une ligne menée du sommet. V.* 256.

3°. *Par une ligne parallèle à la base*; ce problême rentre dans celui du n°. 334.

172. 4°. *Par une ligne* DF *menée par un point donné* D. Désignons AC par b, AB par c, la parallèle DI à AC par f, AI par d, enfin l'inconnue AF par x. Les triangles semblables AEF DIF donnent $AE = \frac{fx}{x+d}$; et comme $\frac{m}{n}$ est le rapport donné des triangles AEF CAB, on a (264) $\frac{m}{n} = \frac{AE \times AF}{AB \times AC}$; donc lorsque le point donné D est au-dessus de AC, on a

$$bcm\,(x+d) = fn\,x^2.$$

Mais si ce point est dans le triangle ABC en D', les figures deviennent indirectes (330); et, comme en faisant mouvoir DI pour prendre la position $D'\,I'$, $x\,b\,c\,f$ ne deviennent ni ∞ ni o, AI ou d peut seul changer de signe. C'est ce qui arrive en effet, puisqu'en comparant $AI = IB - AB$ avec $AI' = AB - I'B$, on voit que AI et AI' sont indirects. Il suit de là que lorsque le point donné est en D' dans le triangle, l'équation ci-dessus n'est vraie qu'après avoir changé . . . . . d en $-d$. Donc.

$$bcm\,(x-d) = fn\,x^2.$$

Enfin, si le point donné est en D'', au-dehors de ABC, en faisant mouvoir $D'I'$ pour prendre la position $D''I''$, AI' devient AI'', et $D'I'$, $I'F$ passent seuls par zéro

en F. On verra aisément que $D''I''$ et $D'I'$ sont 172.
indirects, ce qui oblige de changer le signe de f dans la dernière équation. On trouve ainsi

$$bcm\,(d-x)=fn\,x^2:$$

en rapprochant ce cas du premier, on voit que d et f sont devenus indirects ensemble.

Si on demande que DF coupe l'angle $F'AE'$, on verra 173.
en faisant tourner DF pour se placer en DE', que AF passe par zéro ainsi que AE. Ces quantités peuvent donc seules être indirectes, et le sont en effet, ainsi qu'on peut s'en assurer. Il faut donc changer x en $-x$ dans notre première équation, ce qui interprète la racine négative qu'elle fournit (*V.* 332) ; ce cas rentre dans le dernier. Au reste, chacun d'eux peut être traité séparément ; mais telle est la généralité de l'analyse, qu'il ne faut que savoir comprendre son langage pour en déduire toutes les circonstances que présentent les problèmes.

338. *Trouver l'aire* z *d'un triangle* ABC *connoissant* 110.
les trois côtés, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Soit $AD=x$, on a (218) $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}$; or le triangle ABD donne $BD=\sqrt{(c^2-x^2)}$; donc $z=\frac{1}{2}b\times BD$ devient $z=\frac{1}{4}\sqrt{\{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2\}}$. Le radical affecte la différence de deux carrés, qui équivaut (97, 3°.) à $\quad(2bc+b^2+c^2-a^2)\,(2bc-b^2-c^2+a^2)$,
ou à $\quad\{(b+c)^2-a^2\}\,\{a^2-(b-c)^2\}$

mais ces facteurs éprouvent à leur tour la même décomposition, et on obtient

$$z=\tfrac{1}{4}\sqrt{\{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\}},$$

ou, en faisant le périmètre $a+b+c=2p$,

110. $z = \sqrt{\{p(p-a)(p-b)(p-c)\}}$.

En remontant au nº. 318, on trouve pour le rayon du cercle circonscrit au triangle $R = \frac{abc}{4z}$.

46. Quant au rayon r du cercle inscrit, les aires des triangles AOB AOC BOC étant $\frac{1}{2}cr$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}ar$, la somme est $z = pr$, d'où

$$r = \frac{z}{p} = \sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}};$$

ces formules se prêtent facilement au calcul logarithmique.

339. *Construire un rectangle dont l'aire soit donnée, ainsi que la somme ou la différence* *des deux côtés adjacens.* Soit p^2 le carré égal au rectangle cherché, x et y ses côtés, on a $xy = p^2$ et $x \pm y = m$: éliminant y, il vient $x^2 - mx = \mp p^2$, équation dont nous savons construire les racines (329, IX).

340. *Trouver deux lignes* x *et* y, *qui soient dans le même rapport que deux parallélogrammes donnés.* B b étant leurs bases, H h leurs hauteurs, on doit avoir $\frac{x}{y} = \frac{BH}{bh}$. Si on donne x, une construction facile (322) fera connoître y ; mais si ces lignes sont inconnues, l'une est arbitraire, et on peut simplifier en prenant $y = b$, d'où $x = \frac{BH}{h}$; x est alors quatrième proportionnelle à h, B et H. Ce problême revient à *construire un rectangle* hx *dont la hauteur* h *est donnée, et dont l'aire équivaut à celle d'un autre rectangle connu* BH.

341. Pour construire les formules de deux dimensions, on les réduit à deux facteurs BH (*voyez* ce qui a été dit 326) ; l'un représente la base, l'autre la hauteur du

rectangle dont l'aire a pour valeur l'expression proposée. ainsi pour $x = \sqrt{\{cd(a^2 - b^2)\}}$, on fera ...... $a^2 - b^2 = B^2$, $\sqrt{cd} = H$: les longueurs B et H seront faciles à trouver, et $x = BH$ sera l'aire d'un rectangle connu.

Mais si on veut que l'aire soit un parallélogramme ou un triangle,..... comme la base et la hauteur ne suffisent plus pour le déterminer, le problème admet une infinité de solutions, à moins qu'on ne donne une autre condition, telle que l'un des angles, ou le rapport de deux côtés, etc.

Pour former un triangle équivalent au cercle dont le rayon est $R = a\sqrt{\frac{m}{n}}$, on prendra R pour base et une ligne h égale à la demi-circonférence pour hauteur, ou $h = \pi R = \frac{22}{7} a \sqrt{\frac{m}{n}}$ par approximation. Ces valeurs se construisent par la fig. 166, (329, VI). Il restera ensuite à tracer un triangle dont une des parties est arbitraire.

342. Pour évaluer l'aire d'un *quadrilatère* $ABCD$, abaissons les perpendiculaires $DE = h$, $CF = h'$, sur la base $AB = a$; faisons $AE = b$, $BF = b'$, d'où (259) l'aire $CFED = \frac{1}{2}(h + h') \times (a - b - b')$; de plus, on a $ADE = \frac{1}{2} bh$, $CBF = \frac{1}{2} b'h'$: on trouve enfin pour la somme des aires, 174.

$$ABCD = \frac{1}{2}(a - b)(h' + \frac{1}{2}a - b')h.$$

Cette formule d'une application facile doit être modifiée lorsque la perpendiculaire DE tombe hors du quadrilatère, car alors il faut changer le signe de b; de même pour b', lorsque la perpendiculaire CF est dans le même cas, comme on le voit fig. 175 (332). 175.

5. *Propositions sur les Volumes des Corps.*

146. 343. Nous avons comparé (293, 314) l'aire et le volume du cylindre à celui de la sphère : comparons-la au *cône circonscrit* qui est engendré par la révolution du triangle équilatère IKH autour de BH. On sait (319) qu'on a $IH = 2IB = 2R\sqrt{3}$; de plus (248). . . . cir. $IB = 2\pi R\sqrt{3}$; enfin l'aire du cône (289) est $= 6\pi R^2$, ou 6 fois l'un des grands cercles, et double de la base qui est $3\pi R^2$; donc $9\pi R^2$ est l'aire totale du cône. L'aire du cylindre vaut six grands cercles, celle de la sphère en vaut quatre, celle du cône neuf. Donc l'*aire du cylindre circonscrit à la sphère est moyenne proportionnelle entre celles de la sphère et du cône circonscrit.*

Ce qui vient d'être dit pour les aires du cylindre et du cône circonscrits à la sphère, est encore vrai pour leurs volumes, qui sont entre eux comme leurs surfaces (314).

Ces propositions se vérifient aussi pour le cylindre et le cône inscrits à la sphère, c.-à-d. engendrés par le carré et le triangle équilatéral inscrits au cercle générateur.

344. Toute formule de trois dimensions se réduit à un produit de trois facteurs $x = ABC$, qui sont les dimensions d'un parallélipipède dont le volume est égal à x. On peut d'ailleurs construire cette formule par un cube, un tétraèdre, un cylindre........... C'est ce qui constitue les problèmes relatifs à la *Cubature*. On verra aisément ce qu'ils ont d'indéterminé.

345. Nous donnerons ici, par l'analyse, les valeurs du volume du tétraèdre et de la sphère.

Soient S la base, et H la hauteur d'un tétraèdre ; partageons H en n parties égales, par des plans parallèles à la base et distans entre eux de i, ce qui suppose $H = ni$; puis construisons des prismes extérieurs

comme il a été dit (309). L'aire s d'une des sections est (278) donnée par $\frac{s}{S}=\frac{h^2}{H^2}$, d'où $s=\frac{Sh^2}{H^2}$, h étant la distance du plan au sommet. Ces distances sont ici successivement i $2i$ $3i$..... ni, ainsi on a pour les aires des sections $\frac{Si^2}{H^2}$, $\frac{2^2Si^2}{H^2}$, $\frac{3^2Si^2}{H^2}$, ... $\frac{n^2Si^2}{H^2}$, de sorte que la somme des volumes des prismes extérieurs est $\frac{Si^3}{H^2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$, qu'on peut mettre (487, III) sous la forme $\frac{Si^3}{H^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}$, ou $\frac{Si^3n}{H^2}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{2.3}$ (*). Mettons $\frac{H}{i}$ pour n, et désignons par α l'excès de cette somme sur le volume V du tétraèdre, nous aurons $V+\alpha=\frac{1}{3}SH+\frac{1}{2}Si+\frac{1}{6}\cdot\frac{Si^2}{H}$, dont la limite donne $V=\frac{1}{3}SH$, puisque α et i sont d'une petitesse arbitraire.

346. Lorsque le triangle ABC tourne autour de sa base AC, il décrit deux cônes opposés par leurs bases; leurs volumes sont (310), $\frac{1}{3}\pi.BD^2.AD$ pour ABD, et $\frac{1}{3}\pi.BD^2.DC$ pour BDC : la somme est $\frac{1}{3}\pi.BD^2.AC$. Abaissons la perpendiculaire $AP=R$ sur le côté BC, les triangles semblables CBD, CAP donneront. . . . . 176.

(*) Si on regarde chacune de nos sections comme le base supérieure d'un prisme, on formera la série des prismes intérieurs, il suffit donc pour avoir leur somme de changer ci-dessus n en $n-1$. Cette somme est $\frac{Si^3n}{H^2}\times\frac{2n^2-3n+1}{2.3}$, dont la différence avec la première est Si, à cause de $H=ni$. On retrouve donc la même différence entre ces deux sommes que précédemment (309), ce qui prouve qu'elles ont pour limite le volume du tétraèdre.

176. $\frac{BC}{BD} = \frac{CA}{AP}$, d'où $BD.AC = R.BC$; ainsi le volume engendré par BAC est $\frac{1}{3}\pi R.BD.BC$. Or la surface décrite par BC, que nous désignerons par *surface* BC, est celle d'un cône, et $= \frac{1}{2} BC$. Car $BD = \pi.BD.BC$: donc le volume engendré est $= \frac{1}{3}$ R. *surface* BC.

Si le triangle ABI tourne autour de AC, on a

$$\textit{volume}\ ABC = \tfrac{1}{3} R\ \textit{surf.}\ BC,$$

$$\textit{volume}\ AIC = \tfrac{1}{3} R\ \textit{surf.}\ IC\ ;$$

donc $$\textit{volume}\ ABI = \tfrac{1}{3} R\ \textit{surf.}\ BI.$$

C'est-à-dire que *le volume engendré par un triangle* qui tourne autour d'un axe quelconque tracé dans son plan par son sommet et hors de sa surface, est *le produit d l'aire que décrit sa base par le tiers de sa hauteur.*

177. Le théorème ci-dessus a également lieu lorsque le triangle générateur ABI tourne autour d'un axe AK parallèle à sa base BI. En effet, le volume engendré est le cylindre décrit par $BIKD$, plus le cône ABD, moins le cône AIK, ou $\pi\ BD^2\ (\frac{1}{3}\ AD + DK - \frac{1}{3}\ AK)$ ou $\pi BD^2 \times \frac{2}{3}\ DK$, ou enfin $\frac{1}{3}\ AP \times$ surf. BI.

145. Comme on auroit facilement le volume engendré par le polygone circonscrit ABD....., en décomposant son aire en triangles dont le sommet seroit au centre, il sera aisé d'en conclure que le volume de la sphère et celui du segment sphérique sont le produit du tiers du rayon par la surface de la sphère ou de la calotte. On retrouve ainsi les valeurs connues (313).

CHAPITRE II.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

1. *Des Sinus*, *Cosinus*, *Tangentes*, *etc.*

347. Jusqu'ici nous avons plutôt évalué les inconnues en lignes qu'en nombres; cependant on sent que l'exactitude des solutions graphiques dépendant de la perfection des instrumens et de l'adresse avec laquelle on les emploie, il doit être préférable de recourir à des nombres, afin d'obtenir des approximations aussi grandes qu'on veut. On a réduit toutes les figures rectilignes au triangle qui est la plus simple; et les opérations *Géodésiques* les plus compliquées se réduisent, en dernière analyse, à des résolutions de triangles, c.-à-d. à la recherche de la valeur *numérique* des diverses parties qui composent les triangles. La *Trigonométrie* est la doctrine qui enseigne ces sortes de calculs.

Il est nécessaire de trouver des équations qui lient les angles d'un triangle à ses côtés, afin que plusieurs de ses parties étant données, on puisse trouver les autres. L'introduction des angles dans le calcul exige quelques précautions, parce qu'ils ne peuvent être rapportés à la même unité que les lignes. Les géomètres ont évité l'embarras qui résulteroit d'une double unité, par une remarque assez simple. L'angle BCA seroit déterminé, si la position d'un 178.
point quelconque du côté BC, l'étoit par rapport au côté AC. Décrivons donc du sommet C, avec un rayon

178. quelconque *CK*, l'arc *KG*; l'abscisse *CI* et l'ordonnée *IK* rectangulaires (l'une de ces longueurs suffit, parce que le rayon est connu) détermineront le point *K*, et par conséquent l'angle *C*; arrêtons-nous à cette disposition.

179. L'abscisse *CD* d'un point quelconque *B* de la circonférence s'appelle le *Cosinus* de l'arc *AB*; l'ordonnée *BD* en est le *Sinus*; on définit ainsi ces lignes : *le sinus d'un arc est la perpendiculaire abaissée de l'une de ses extrémités sur le rayon qui passe par l'autre : le cosinus est la distance du pied du sinus au centre..*

178. Si on eût élevé *HG* perpendiculaire sur *CA*, et par conséquent tangente en *G*, l'une des longueurs *GH* et *CH* auroit aussi déterminé l'angle *C* et l'arc *KG* ; on nomme *HG* la *Tangente* et *CH* la *Sécante* de cet arc; ce ne sont plus, comme en géométrie des lignes indéfinies. *La tangente* AT *d'un arc* AB *est la partie qu'interceptent sur*
179. *la tangente menée à l'une des extrémités de cet arc, les deux rayons qui le terminent : la sécante* CT *est le rayon prolongé jusqu'à la tangente.*

Lorsque l'arc *EB*, complément de *AB*, est déterminé, *AB* l'est également : on peut donc fixer la grandeur d'un arc *AB*, en donnant le sinus *GB*, la tangente *EM* ou la sécante *CM* du complément *BE*; c'est ce qu'on nomme le *Cosinus*, la *Cotangente* et la *Cosécante* de l'arc *AB*, pour désigner le sinus, la tangente et la sécante de son complément.

348. Le rayon étant donné, la grandeur d'un angle ou d'un arc dépend de celle de son sinus, ou son cosinus, ou sa tangente, ou sa sécante, ou sa cotangente, ou sa cosécante, qu'on désigne par les caractéristiques *Sin*, *Cos*, *Tang*, *Sec*, *Cot*, *Cosec*. Nous pourrons donc, dans les calculs, introduire les arcs et les angles en nous servant de la même unité que pour les lignes droites, but que nous

nous étions proposé. Mais, avant de faire usage de ces considérations, comparons ces *lignes trigonométriques* entre elles, et cherchons les équations qui les lient, puisqu'il est évident qu'*une seule étant connue, les autres en dépendent.* 178.

Le triangle rectangle BCD donne $CD^2+BD^2=CB^2$, CD est le cosinus, DB le sinus de l'arc $AB=a$, CB est le rayon R; donc 179.

$$\sin^2 a + \cos^2 a = R^2 \ . \ . \ . \ . \ (1).$$

Le triangle rectangle CAT donne $CT^2=CA^2+AT^2$

$$\sec^2 a = \text{tang}^2 a + R^2 \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Les triangles semblables CBD, CTA donnent

$$\frac{CD}{BD}=\frac{CA}{AT} \text{ et } \frac{CD}{CA}+\frac{CB}{CT},$$

ou

$$\text{tang } a = \frac{R \sin a}{\cos a} \ . \ . \ . \ (3),$$

$$\sec a = \frac{R^2}{\cos a} \ . \ . \ . \ (4).$$

Cette dernière formule prouve que *le rayon est moyen proportionnel entre le cosinus et la sécante;* du reste, les équations (1), (2) et (3) suffisant pour exprimer la similitude des triangles CBD, CTA, la 4ᵉ. est une conséquence des trois autres. Ainsi, on ne doit pas regarder ces quatre relations comme distinctes; elles n'équivalent qu'à trois. On peut même s'en convaincre directement en déduisant l'une quelconque des autres par l'élimination.

Ces formules doivent aussi avoir lieu entre le sinus, le cosinus, la tangente et la sécante de l'arc EB complément de AB : on peut donc y changer ces quantités respectivement en cosinus, sinus, cotangente et cosécante. Mais on peut aussi trouver ces relations directement : car les triangles semblables CBD (ou CBG) et

179. CME donnent $\frac{CG}{CE}=\frac{GB}{EM}$, $\frac{CG}{CB}=\frac{CE}{CM}$; d'où

$$(5) \ldots \cot a = \frac{R \cos a}{\sin a} \quad \text{et} \quad \text{cosec}\, a = \frac{R^2}{\sin a} \ldots (6),$$

en multipliant les formules 3 et 5, ou comparant les deux triangles CTA et CME, on trouve que *le rayon est moyen proportionnel entre la tangente et la cotangente* ou

$$\text{tang}\, a \times \cot a = R^2 \ldots . (7).$$

Enfin le triangle rectangle CME donne $CM^2 = CE^2 + EM^2$

$$\text{cosec}^2 a = R^2 + \cot^2 a \ldots . (8)$$

349. Ces huit équations (*) (qui n'en renferment que cinq distinctes) servent à trouver les quantités sin a, cos a, tang a, cot a, sec a, cosec a, lorsque l'une est connue. Il suffit d'un peu d'attention pour cela, et d'un calcul simple pour éliminer. Par exemple, (1) donne le sinus quand le cosinus est connu, et réciproquement : car $\sin a = \sqrt{(R^2 - \cos^2 a)}$, et $\cos^2 a = \sqrt{(R^2 - \sin^2 a)}$. De même, (2) donne la tangente quand on a la sécante et réciproquement, etc.....

Parmi ces combinaisons, nous distinguerons la suivante à cause de son utilité : cherchons le cosinus, étant donnée la tangente. De (4) on tire $\cos a = \frac{R^2}{\sec a}$, et comme (2) donne $\sec a = \sqrt{(R^2 + \text{tang}^2 a)}$, on en conclut

$$\cos a = \frac{R^2}{\sqrt{(R^2 + \text{tang}^2 a)}} \ldots (9),$$

(*) On appelle AD le *sinus verse* de l'arc AB ; il est $= R - \cos a$: cette quantité est de peu d'usage.

enfin (3) donnant $R \sin a = \cos a \times \operatorname{tang} a$, on a 179.

$$\sin a = \frac{R \operatorname{tang} a}{\sqrt{(R^2 + \operatorname{tang}^2 a)}} \quad \ldots \quad (10)$$

350. Par $\sin a$, $\cos a$,.... il faut entendre le sinus, cosinus,.... d'un arc dont la longueur est a, le rayon étant fixé $= R$: or, cette longueur dépend du rapport de l'arc a avec le quadrans, et sa détermination exige un calcul. Mais on peut ordinairement l'éviter, car lorsqu'on emploie les arcs pour mesurer des angles, le rayon est tout-à-fait arbitraire : alors ce n'est plus la longueur absolue a de l'arc qui entre dans les calculs, parce qu'elle est proportionnelle au rayon; de sorte que si la circonférence est grande, l'angle est mesuré par un arc plus long que si le rayon eût été moindre. Les sinus sont aussi inégaux, mais leur rapport avec le rayon est le même, puisqu'on a $\frac{KI}{CI} = \frac{BA}{CA}$. Le rapport du sinus au rayon s'appelle 178. le *Sinus naturel;* il a pour valeur le sinus de l'arc semblable pris dans le cercle dont le rayon est un, puisque $\sin a$ et $\frac{\sin a}{R}$ sont alors équivalens.

Concluons de là que 1°. lorsque le rayon sera ainsi arbitraire, ce qui arrive la plupart du tems, pour simplifier les calculs, nous ferons $R = 1$, ce qui donne

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \quad \operatorname{tang}^2 a + 1 = \sec^2 a, \quad \operatorname{tang} a . \cot a = 1,$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{\sin a}{\cos a}, \quad \sec a = \frac{1}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a},$$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 a)}}, \quad \sin a = \frac{\operatorname{tang} a}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 a)}}.$$

178. 2°. Mais la supposition $R=1$, rendant les calculs propres aux cas seulement où le rayon est arbitraire, si on veut rétablir les formules dans l'état plus général où le rayon R est quelconque, on y remplacera $\sin a$, $\cos a$,... par $\frac{\sin a}{R}$, $\frac{\cos a}{R}$,.... ou plutôt on y distribuera des puissances convenables de R de manière à produire l'homogénéité (328).

3°. Lorsque le calcul ou l'expérience aura fait connoître la valeur numérique $\sin a$ du sinus d'un arc, pris pour un rayon R, on aura celle du sinus de l'arc a' semblable dans le cercle dont le rayon est R' en multipliant par le rapport du 1er. rayon au 2e; car $\frac{\sin a}{R} = \frac{\sin a'}{R'}$ donne $\sin a = \frac{R}{R'} \times \sin a'$.

4°. Puisque, dans la mesure des angles, le rayon est arbitraire, on n'emploie pas la longueur absolue des arcs. On a coutume de diviser le quadrans en 100 parties égales qu'on nomme *Degrés* ou *Grades*; chaque grade est lui-même divisé en cent parties qu'on appelle *Minutes*; chaque minute l'est en cent *Secondes*. Ainsi, 18° 54′ 55″ désigneront 18 degrés 54 minutes 55 secondes, ou 18°, 5455. Telles sont les dénominations usitées dans la mesure des angles. Le rayon est d'ailleurs arbitraire, on ne désigne ainsi que le rapport de l'arc au quadrans, ce qui suffit pour fixer la grandeur de l'angle : ainsi, 18° 54′ 55″ = 0q,185455. Par $\sin a$, on n'entend plus que le sinus d'un arc dont a est le nombre de degrés.

179. 351. Jusqu'ici notre arc AB est $< 1^q$; mais faisons mouvoir le point B de A vers $EHA'K$.... pour lui faire décrire le cercle entier, et suivons les variations qu'éprouvent le sinus et le cosinus. En A le sinus $=0$, le

cosinus $= R$. A mesure que l'arc AB croît, le sinus aug- 179.
mente, le cosinus diminue, jusqu'en E; le quadrans AE a R pour sinus et o pour cosinus.

Au-delà de AE, le sinus décroît, le cosinus augmente; on voit que, pour AH les triangles $HIC = BCD$ donnent $HI = BD$; ainsi, *le sinus d'un arc est le même que celui de son supplément*. La même chose a lieu pour le cosinus, car $IC = CD$; seulement lorsque l'arc est $> 1^q$ le cosinus est négatif (333). Pour la demi-circonférence AEA', le sinus $= 0$, le cosinus $= -R$. Au-delà le sinus croît de nouveau, et le cosinus diminue; l'un et l'autre sont négatifs.... On continuera aisément.

Quant aux autres lignes trigonométriques, on pourroit suivre de même sur la figure leurs variations et leurs signes; mais il est préférable de recourir aux formules (3), (4), (5), (6), puisque l'on vient de reconnoitre les états successifs du sinus et du cosinus. On verra donc que

$\sin 0 = 0$, $\cos 0 = R$, donnent $\text{tang}\, 0 = 0$, $\sec 0 = R$, $\cot 0 = \infty$,

$\sin 1^q = R$, $\cos 1^q = 0$, ... $\text{tang}\, 1^q = \infty = \sec 1^q$, $\cot 1^q = 0$.

Dans le premier quadrans tang a, sec a croissent avec a, cot a décroît; tout est positif.

Dans le second quadrans, tang a, sec a décroissent, cot a croît avec l'arc a, etc.

Dans les quatre quadrans, le sinus et le cosinus reprenant les mêmes valeurs, on voit que *tout arc plus grand que le quadrans, a pour sinus, cosinus, tangente,..... la même valeur, en ôtant 200° autant de fois qu'il est possible*. Seulement il faut avoir égard aux signes; ceux du sinus et du cosinus sont connus et servent à déterminer les autres. Ainsi, $\sin 257° = -\sin 57°$; $\text{tang}\, 643° = \text{tang}\, 43°$, etc.

Lorsque l'arc AB est déterminé son sinus, son cosinus,... le sont : mais l'inverse n'est point vrai; ainsi, le sinus

179. *BD* appartient non-seulement à l'arc *AB*, mais aussi à son supplément *AH* et à ces arcs *AB* et *AH*, augmentés d'un nombre quelconque de circonférences. Tous ces arcs ne donnent que deux angles supplémens l'un de l'autre.

On fera le même raisonnement pour les cosinus, etc....

En regardant l'arc *AF* comme étant de signe contraire à *AB*, on voit que

$$\sin(-a) = -\sin a,\ \cos(-a) = \cos a,\ \text{tang}(-a) = -\text{tang}\, a, \ldots$$

2. *Formules générales.*

352. D'après ces notions préliminaires, on voit que la résolution des triangles est renfermée dans un nombre convenable d'équations entre les côtés et les angles. C'est cette recherche qui va nous occuper.

179. En prolongeant *BD*, on a $BD = \frac{1}{2} BF$, ainsi *le sinus d'un arc est la moitié de la corde d'un arc double.*

Si *BF* est égal au rayon, il sera le côté de l'hexagone régulier inscrit (236); *BAF* sera le sixième de la circonférence, et *BA* sera le tiers de *AE*. *Le sinus du tiers du quadrans est donc la moitié du rayon.* Les formules 1, 3, 5, donnent

$$\sin \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2} R, \cos \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2} R\sqrt{3}, \text{tang}\, \tfrac{1}{3} q = \frac{R}{\sqrt{3}}, \cot \tfrac{1}{3} q = R\sqrt{3};$$

on connoît aussi $\sin \frac{2}{3} q$,... puisque $\cos \frac{2}{3} = \sin \frac{1}{3} q$: d'où

$$\sin \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{2} R\sqrt{3}, \cos \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{2} R, \text{tang}\, \tfrac{2}{3} = R\sqrt{3}, \cot \tfrac{2}{3} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

179. 353. Lorsque l'arc *AB* est de 50° ou la moitié de *AE* le triangle *CTA* est isoscèle, ainsi on a $AT = AC$, ou *la tangente de 50° est égale au rayon.* Donc

$$\text{tang } 50° = R = \cot 50°,\ \cos 50° = \tfrac{1}{2} R\sqrt{2} = \sin 50°.$$
$$\text{tang}\, 150° = -R = \cot 150°,\ \sin 150° = \tfrac{1}{2} R\sqrt{2} = -\cos 150°.$$

354. soit CAB un triangle rectangle en A; si d'un angle aigu C avec le rayon $CK = 1$, on décrit l'arc KG, et si on mène le sinus KI et la tangente HG, CI sera le cosinus de C: or, les triangles semblables CKI, CHG, 178.
CAB donnent $\frac{CK}{CI} = \frac{CB}{CA}$, $\frac{CK}{KI} = \frac{CB}{BA}$ et $\frac{CG}{GH} = \frac{CA}{AB}$;

d'où $CA = CB \times \cos C$, $BA = CB \times \sin C$,

et $BA = CA \times \text{tang } C$.

(Celle-ci est le quotient de la seconde divisée par la première).

Donc, 1°. *Un côté de l'angle droit est le produit de l'hypothénuse par le cosinus de l'angle aigu compris* . . . (A)

2°. *Un côté de l'angle droit est le produit de l'autre côté par la tangente de l'angle aigu adjacent à celui-ci* . . (B)

Nous représenterons dorénavant les angles par A, B et C, et les côtés qui leur sont respectivement opposés par a, b et c. Ainsi a étant l'hypothénuse, on a

$$b = a \cos C,\ c = a \cos B = a \sin C. \quad . \ . \ (A)$$
$$c = b \,\text{tang}\, C \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (B)$$

Ce sont les formules qui servent à la résolution des triangles rectangles, ainsi que nous le développerons bientôt.

355. Si de l'angle B du triangle quelconque ABC, on abaisse la perpendiculaire BD, l'angle B sera coupé en deux angles qui seront les complémens respectifs de A et C. Nos théorèmes ci-dessus donnent $BD = AB \times \sin A$, $BD = BC \times \sin C$: d'où $c \sin A = a \sin C$ ou. . . 176.
$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$. De même en abaissant la perpendiculaire de C ou de A, on auroit $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$; donc

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \ . \ . \ . \ . \ . \ (C)$$

176. Ainsi, *tout triangle a les sinus de ses angles proportionnels aux côtés opposés.*

En désignant par x le segment DA (218), on a. . . $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$; mais le triangle rectangle BDA donne $DA = BA \times \cos A$ ou $x = c \cos A$; donc

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \ldots\ldots (D)$$

38. Si la perpendiculaire BD tombe hors du triangle, il faut $+ 2bx$ au lieu de $- 2bx$. Mais comme alors l'angle $BA'C$ est obtus, le cosinus devenant négatif, le signe de $- 2bc \cos A$ redevient positif, et se rétablit de lui-même. Donc notre formule s'applique à tous les cas (330).

180. 356. Soient deux arcs $AB = \alpha$, $BD = \beta$; cherchons les sinus et cosinus de leur somme AD et de leur différence AK. Menons la corde DK, au milieu I de laquelle le rayon CB est perpendiculaire; puis les parallèles EI, KH à AC, et les perpendiculaires DP, IG, BL et KO; DP est le sinus de $AD = \alpha + \beta$; KO est celui de $AK = \alpha - \beta$; les cosinus sont CP et CO : ces quatre quantités sont les inconnues du problème.

On voit que $DE = EH$; DE et IG ont donc pour somme $IG + DE$, ou. . . . . $DP = \sin(\alpha + \beta)$
et pour différence $IG - DE = HP$, ou $KO = \sin(\alpha - \beta)$
De même EI étant la moitié de HK,
on a $PG = GO = EI$, ainsi CG et EI
ont pour somme. . . . . $CO = \cos(\alpha - \beta)$
et pour différence. , ... $CP = \cos(\alpha + \beta)$
Donc $\sin(\alpha \pm \beta) = IG \pm DE$; $\cos(\alpha \pm \beta) = CG \mp EI$.

Il ne reste plus pour obtenir IG, DE, CG, EI qu'à appliquer aux triangles rectangles CIG, DEI notre théorème (A). Il vient $IG = CI \times \sin \alpha$, $DE = DI \cos \alpha$, puisque l'angle $EDI = \alpha$; or, $DI = \sin \beta$ et $CI = \cos \beta$;

les sinus et cosinus de α et β sont les données de la question ; ainsi, on a 180.

$$IG = IC \times \sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta$$
$$DE = DI \times \cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha$$
on a de même $$CG = CI \times \cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta$$
$$EI = DI \times \sin\alpha = \sin\alpha\sin\beta$$
d'où $$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \ldots\ldots (E)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \ldots\ldots (F)$$

Ces quatre formules servent de base à toute la théorie des lignes trigonométriques : si le rayon au lieu d'être $=1$, étoit R, on mettroit simplement R pour diviseur des seconds membres (350, 2°.).

357. Faisons $\alpha = \beta$ dans ces formules ; en prenant le signe supérieur, on trouve

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (G)$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \ldots (H)$$

(en mettant dans celle-ci $1 - \cos^2\alpha$ pour $\sin^2\alpha$).

Telles sont les valeurs du sinus et du cosinus du double de l'arc α (*).

358. Si on regarde dans ces équations $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ comme inconnus, et $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ comme donnés, il faudra éliminer entre elles. Mais comme le calcul seroit compliqué, on préfère employer au lieu de la première,

(*) Pour avoir les sinus et cosinus de 3α, on fait $\beta = 2\alpha$, ce qui donne $\sin 3\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha$, $\cos 3\alpha =$ etc. ; mais il faut mettre pour $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$ leurs valeurs, et il vient

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,\quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Il est aisé de voir qu'en résolvant ces équations par rapport à $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, on auroit les sinus et cosinus du tiers ; on obtiendroit de même ceux de 4α et $\frac{1}{4}\alpha$, etc. ; *Voy.* ci-après (358).

$1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$; alors en ajoutant H, ou en soustrayant, on obtient de suite

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha,\quad 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha.$$

Si donc on change ici 2α en α, ce qui est permis, on a

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)},\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)} \ldots (I)$$

équations qui donnent les sinus et cosinus de la moitié d'un arc.

359. Divisons l'une par l'autre les formules E et F, il vient $\dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}$; or, si on divise les deux termes du second membre par $\cos\alpha\cos\beta$, en remarquant que $\operatorname{tang}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, on obtient (*)

$$\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta)\ \frac{\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta}{1 \mp \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta} \ldots (K)$$

qui donne la tangente de la somme et de la différence de deux arcs. En faisant $\alpha = \beta$, on a celle du double,

---

(*) On obtient de même $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$.

Si on fait $\alpha = 50°$, comme $\operatorname{tang} 50° = 1$, il vient

$$\operatorname{tang}(50° \pm \beta) = \frac{1 \pm \operatorname{tang}\beta}{1 \mp \operatorname{tang}\beta}.$$

Le même calcul donnera aussi, en employant les formules E et F, avec les signes convenables,

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\beta - \cot\alpha} = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta};$$

$$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \mp \beta)} = \frac{\cot\beta \pm \cot\alpha}{\pm 1 + \cot\alpha\cot\beta} = \frac{\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta}{1 \pm \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta};$$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cot\beta - \operatorname{tang}\alpha}{\cot\beta + \operatorname{tang}\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}.$$

$$\tang 2\alpha = \frac{2 \tang \alpha}{1 - \tang^2 \alpha} \ldots (L)$$ 178.

En divisant l'une par l'autre les équations (I), il vient

$$\tang \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \,.\,. (M)$$

360. Reprenons les équations (E); en les ajoutant et les soustrayant, il vient

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cos\alpha$$

et divisant ces formules l'une par l'autre,

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\tang\alpha}{\tang\beta}$$

Si donc on fait $\alpha+\beta = C$ et $\alpha - \beta = B$, d'où (107) $\alpha = \frac{1}{2}(C+B)$, $\beta = \frac{1}{2}(C-B)$, on a (*)

(*) Le même calcul sur les équations E et F combinées 2 à 2 donne diverses autres formules; elles sont de peu d'usage, ce qui nous détermine à les mettre simplement en note, ainsi que quelques-unes déja obtenues : elles ne servent guère qu'à remplacer dans certains cas des additions ou soustractions, par des monomes formés de plusieurs facteurs, afin de pouvoir y appliquer le calcul logarithmique.

$$\sin A + \sin B = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B).\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\sin A - \sin B = 2\sin\tfrac{1}{2}(A-B).\cos\tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B).\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\cos B - \cos A = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B).\sin\tfrac{1}{2}(A-B);$$

en faisant $A = 100°$ dans les deux premières et $B = 0$ dans les autres, il vient

$$1 + \sin B = 2\sin(50° + \tfrac{1}{2}B).\cos(50° - \tfrac{1}{2}B) = 2\sin^2(50° + \tfrac{1}{2}B)$$
$$1 - \sin B = 2\sin^2(50° - \tfrac{1}{2}B) = 2\cos^2(50° + \tfrac{1}{2}B)$$
$$1 + \cos A = 2\cos^2\tfrac{1}{2}A,\quad 1 - \cos A = 2\sin^2\tfrac{1}{2}A \,.\,.\,.\,.\, (I)$$

178. $$\frac{\sin C + \sin B}{\sin C - \sin B} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(C+B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(C-B)}.$$

On a vu (355) que $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$ d'où on tire (73, 2°.) $\frac{\sin C + \sin B}{\sin C - \sin B} = \frac{c+b}{c-b}$; l'équation précédente devient donc (en remarquant que $A + B + C = 200°$, donne $\frac{1}{2}(C+B) = 100° - \frac{1}{2}A$,)

$$\frac{c+b}{c-b} = \frac{\cot \frac{1}{2} A}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(C-B)} \quad \ldots\ldots (N)$$

3. *Formation des Tables de sinus, cosinus....*

361. Jusqu'ici ces formules sont stériles pour nous ; car pour les appliquer à la résolution des triangles, il faudroit connoître les sinus des angles donnés, afin d'en introduire la valeur dans les équations; ou bien, lorsqu'elles sont destinées à faire connoître un sinus, il fau-

---

En effectuant diverses divisions, on en tire

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+B); \quad \frac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \tfrac{1}{2}(A+B);$$

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \tfrac{1}{2}(A-B); \quad \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B);$$

$$\frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = -\cot \tfrac{1}{2}(A+B) . \cot \tfrac{1}{2}(A-B).$$

$$\frac{1 + \sin B}{1 - \sin B} = \operatorname{tang}^2 (50° + \tfrac{1}{2} B); \quad \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = \cot^2 \tfrac{1}{2} A.$$

$$\frac{1 + \sin B}{1 + \cos A} = \frac{\sin^2 (50° + \frac{1}{2} B)}{\cos^2 \frac{1}{2} A}; \quad \frac{1 - \sin B}{1 - \cos B} = \frac{\sin^2 (50° - \frac{1}{2} B)}{\sin^2 \frac{1}{2} B}.$$

On peut, au reste, varier ces formules de bien des manières; il est inutile de nous étendre sur ce sujet; on peut consulter l'*Intr. à l'Anal. des inf.* d'Euler.

droit pouvoir en déduire l'angle correspondant : de là la nécessité de former une table qui donne les sinus, cosinus, ... lorsqu'on connoît les nombres de degrés des arcs, et réciproquement.

Il résulte de nos équations 1, 3 et 5, que si les sinus étoient connus, un calcul très-simple donneroit le cosinus, la tangente et la cotangente correspondans ; on auroit aussi la sécante et la cosécante, mais on les comprend rarement dans les tables ; même il n'est nécessaire de calculer les lignes trigonométriques que jusqu'à 100°, puisqu'au-delà elles se reproduisent.

On remarque d'ailleurs que $\sin a = \cos(100° - a)$,... ; ainsi les tables ne contiendront les sinus, cosinus, tangentes et cotangentes que jusqu'à 50 degrés. C'est ainsi que le cosinus de 80° est le sinus de 20, et que la cotangente de $175° = -\text{tang } 75° = -\cot 25°$. Voyons donc à calculer les sinus et cosinus jusqu'à 50°, pour tous les arcs compris dans le quadrans partagé de degré en degré ou de minute en minute, etc.

Concevons qu'après avoir pris un rayon d'un nombre arbitraire d'unités, et divisé le quadrans en degrés, minutes et secondes, on ait obtenu le nombre d'unités contenues dans les sinus et cosinus de chacun de ces arcs jusqu'à 50°; au lieu de composer la table avec ces nombres, pour la commodité des calculs, on y inscrit leurs logarithmes. Comme les sinus sont plus petits que le rayon, il convient de supposer le rayon d'un assez grand nombre d'unités, pour que le sinus du plus petit arc de la table soit plus grand que *un*, afin d'éviter les logarithmes négatifs (91, 1°.). Dans les tables ordinaires, les arcs procèdent de 10 en 10 secondes, et le rayon a 10 pour logarithme ou $LR = 10$, $R = 10$ milliards.

278. Cherchons donc un moyen d'obtenir les valeurs numériques des sinus, après quoi on trouvera aisément leurs logarithmes. En ajoutant les deux formules (E) et prenant R pour rayon, il vient

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=\frac{2\sin\alpha\cos\beta}{R}$$

faisons $\alpha=mx$, $\beta=x$, et opérons de même pour (F) nous aurons

$$\sin(m+1)x=\frac{2\cos x}{R}.\sin mx-\sin(m-1)x$$

$$\cos(m+1)=\frac{2\cos x}{R}.\cos mx-\cos(m-1)x$$

Soit donc x le plus petit des arcs de la table, de sorte que ces arcs procèdent ainsi x, $2x$, $3x$, $4x$.... Il résulte de nos équations que si on connoît les sinus y et z de deux arcs successifs $(m-1)x$ et mx, le sinus suivant sera le produit de celui-ci par $\frac{2\cos x}{R}$, diminué du précédent. Soit $\frac{\cos x}{R}=p$, on aura $\sin(m+1)x=2pz-y$. Les cosinus suivent la même loi (*).

Connoissant $\sin x$ et par conséquent $\cos x$ et p, et faisant $\frac{\sin x}{R}=q$, on aura donc

$\cos 0x=R$, $\cos 1x=Rp$, $\cos 2x=R(2p^2-1)$, $\cos 3x=Rp(4p^2-3)$,...
$\sin 0x=0$, $\sin 1x=Rq$, $\sin 2x=2Rpq$, $\sin 3x=Rq(4p^2-1)$,...

pour la loi de ces résultats. V. n°. 527.

(*) Les sinus et cosinus forment donc les séries récurrentes dont l'échelle de relation est composée des deux termes $\frac{2\cos x}{R}$ et -1. (V. n°. 565).

362. La question est donc réduite au calcul du sinus du plus petit des arcs contenus dans la table. Or la longueur d'un arc est nécessairement comprise entre celles de sa tangente et de son sinus; et ces longueurs diffèrent d'autant moins entre elles que l'arc est plus petit (246). On peut donc concevoir un arc $= \frac{100^\circ}{m}$ assez petit, pour qu'en se bornant à un ordre fixé de décimales, le sinus et l'arc ne diffèrent pas; et comme on connoît (320) la longueur de l'arc de $100^\circ = \frac{1}{2} \pi R$, on aura $\frac{\pi R}{2m}$ pour ce sinus. 178.

Pour mieux faire saisir l'esprit de cette méthode, commençons le calcul pour le rayon $= 10$. Le quadrans $= \frac{1}{2} \pi R = 5\pi$; l'arc de $50'$ est $= \frac{5}{200} \pi = 0{,}07854$, or pour l'arc α, qui a cette valeur pour sinus, on a $\sin \alpha = 0{,}07854$, d'où $\cos \alpha = 9{,}99969$ (*) et $\tang \alpha = \frac{R \sin \alpha}{\cos \alpha} = 0{,}07854$. En comparant ces valeurs de $\sin \alpha$ et $\tang \alpha$, on voit qu'elles sont les mêmes; ainsi en se bornant à 5 décimales $\sin \alpha = \alpha$, donc $\alpha = 50'$. On a donc ainsi $\sin 50' = 0{,}07854$. Si on vouloit une plus grande approximation, il faudroit faire le même raisonnement pour un arc $< 50'$. Du reste les calculs doivent être faits avec plusieurs décimales au-delà de celles qu'on veut conserver, afin d'éviter l'accumulation des erreurs.

Supposons donc qu'on veuille faire procéder la table de 10 en 10 minutes, avec cinq décimales seulement, tous les arcs $<50'$ sont aussi égaux à leur sinus : ainsi sin 10', 20',...

(*) Les cosinus se déduisent aisément des sinus à l'aide des logarithmes; car

$$\cos \alpha = \sqrt{(R^2 - \sin^2 \alpha)} = \sqrt{\{(R + \sin \alpha)(R - \sin \alpha)\}}.$$

seront $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$,.... du sinus qu'on vient de calculer pour 50'; et de plus, comme sin 10' = 0,01571, on a

$$2p = \frac{2 \cos 10'}{R} = 1,999997$$

pour multiplicateur constant, d'après la loi $2pz - y$.

On vérifie aisément les résultats en appliquant directement d'espace en espace les formules des sinus et cosinus, $\alpha \pm \beta$, et 2α; et en pratiquant d'avance et par le même procédé les calculs, soit de degré en degré, soit autrement. Du reste nous donnerons bientôt des voies plus expéditives et plus sûres pour parvenir à la confection des tables : celles-ci suffisent pour les faire concevoir et remplissent notre but.

4. *Résolution des triangles.*

178. 363. *Premier cas. Triangles rectangles.* Les deux formules A et B donnent la résolution complette des triangles rectangles; car elles comprennent les côtés a, b, c et l'angle aigu C; ainsi de ces quatre quantités deux étant données, on peut en déduire les autres. Il seroit même aisé d'éliminer C et d'en tirer la relation $a^2 = b^2 + c^2$ si souvent employée.

Il se présente deux cas, suivant qu'on donne ou un côté et un angle, ou deux côtés. Faisons (350) le rayon $= R$ dans les équations A, puisque dans les tables $LR = 10$.

$$Rb = a \cos C \ldots (1);$$
$$Rc = b \operatorname{tang} C \ldots (2)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \ldots (3)$$

1°. *Etant donnés un angle aigu et un côté*, les deux autres côtés sont seuls inconnus, puisque l'autre angle
178. aigu $B = 100° - C$. Il est visible que les équations 1 et 2 résolvent le problême et donnent chacune un côté.

Soient, par exemple, $C = 37^\circ, 23$, et $b = 45, 54$ mètres. Les formules 1 et 2 donnent

$LR = 10$	$Lb = 1, 6583930$
$Lb = 1, 6583930$	$L \tang C = 9, 8208982$
$C^c. L\cos C = \overline{10}, 0789285$	$-LR = \overline{10}, 0000000$
$La = 1, 7373215$	$Lc = 1, 4792912$

Donc $a = 54, 616$ mèt., et $c = 30, 150$ mèt. Cette opération 181. peut servir à trouver la hauteur $BB' = c$ d'un édifice dont le pied B' est accessible. Le calcul se vérifie en changeant d'inconnues, comme p. 81.

2°. *Etant donnés deux côtés*, la formule 1 ou 2 détermine l'angle aigu C, suivant que l'hypothénuse a est ou n'est pas l'un des côtés donnés. La 3ᵉ. donne le côté inconnu.

Le calcul logarithmique s'applique aisément aux équations 1 et 2. Quant à la 3ᵉ., si a est donné, on a

$$b = \sqrt{(a^2 - c^2)} = \sqrt{\{(a+c)\ (a-c)\}}.$$

Mais si a est inconnu, il faut d'abord chercher l'angle aigu C à l'aide de (2), puis ensuite (1) donne a.

364. *Deuxième cas. Triangles obliquangles.* Il y a quatre cas à considérer ;

1°. *Etant donnés un côté et deux angles*, le 3ᵉ. angle est connu, et on emploie les équations (C, 355).

$$b \sin A = a \sin B \ldots (1)$$
$$c \sin B = b \sin C \ldots (2).$$

Soit, par exemple, $b = 44,656$ mèt., $A = 41^\circ,65$, $C = 80^\circ,16$, d'où on tire $B = 78^\circ, 19$, on a

$Lb = 1, 6498798$	$Lb = 1, 6498798$
$L \sin. A = 9, 7842982$	$L \sin C = 9, 9785595$
$C^c. L \sin B = \overline{10}, 0260009$	$C. L \sin B = \overline{10}, 0260009$
$La = 1, 4601789$	$Lc = 1, 6544402$

donc $a = 28, 852$ mèt., et $c = 45, 127$ mèt. Il est aisé de

181. voir qu'on peut par là mesurer *la distance* B'C *de* C *à un point B' inaccessible, mais visible.*

On peut aussi *trouver la hauteur* BB' *et la distance* B'C *d'un édifice dont le pied est inaccessible et invisible ;* car en mesurant une base horisontale AC et les angles BCA et BAC, qu'elle forme avec les lignes dirigées vers le sommet B, on calculera le côté BC. Alors dans le triangle rectangle $BB'C$, on connoîtra BC et l'angle BCB' (qu'on pourra mesurer quoiqu'on ne puisse pas voir le point B', parce que $B'C$ est horisontale) : on en conclura les valeurs de BB' et $B'C$.

2°. *Étant donnés deux côtés et un angle opposé à l'un*
38. *d'eux.* Désignons ces données par c a et A, on a $c \sin A = a \sin C$, d'où on tire $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$, ce qui ramène au cas précédent. Or la valeur de sin C correspond à deux angles C et C' supplémens ; de sorte qu'on a pour solutions les deux triangles BCA et $BC'A$. Si l'angle donné A est obtus, C est aigu ; et si le problème n'est pas absurde, on doit avoir $a > c$. Lorsque a est aigu et $a > c$, C est encore aigu ; il n'y a donc qu'une solution.

Désignant par p la hauteur BD du triangle, on tire de BAD, $Rp = c \sin A$, d'où $\sin C = \frac{Rp}{a}$. Or si, a étant $< c$ on a $p = a$; on trouve $\sin C = R$, et l'angle C est droit ; il n'y a qu'une solution : $p > a$ rend $\sin C > R$, et il y a absurdité.

Donc tant que le côté a opposé à l'angle donné n'est pas plus petit que l'autre côté donné c, il n'y a qu'une solution. Si $a < c$, il y en a deux ; à moins que a ne soit aussi $< p$, (qui est le cas d'absurdité), ou $= p$ (il n'y qu'une solution). Tout ceci s'accorde avec ce que les considérations géométriques ont fait connoître (198).

3°. *Etant donnés deux côtés et l'angle compris.* Soient A, b et c les données, la formule N (360) devient

$$\tang \tfrac{1}{2}(C-B)=\frac{c-b}{c+b}\cot \tfrac{1}{2}A \ldots (3)$$

d'où on tirera la valeur n de l'angle $\frac{1}{2}(C-B)$; or $\frac{1}{2}A$ est le complément de $\frac{1}{2}(C+B)=m$, puisque $\frac{1}{2}(A+B+C)=100°$, donc on a

$$\tfrac{1}{2}(C+B)=m,\ \tfrac{1}{2}(C-B)=n,$$

d'où $C=m+n$, $B=m-n$. Il ne restera plus qu'à trouver le côté a par le procédé ci-dessus.

On peut au reste déterminer directement ce côté a sans chercher préalablement les angles et le faire servir au contraire à trouver ceux-ci. En effet, reprenons la formule D, ajoutons et soustrayons $2bc$, puis mettons pour $1-\cos A$ sa valeur $2\sin^2\frac{1}{2}A$, (358, I) ; il vient

$$a^2=(b-c)^2+2bc(1-\cos A)=(b-c)^2\left\{1+\frac{4bc\sin^2\frac{1}{2}A}{(b-c)^2}\right\}$$

Cela posé, on cherchera l'angle φ qui a $\frac{4bc\sin^2\frac{1}{2}A}{(b-c)^2}$ pour carré de sa tangente, ce qui est toujours possible, puisqu'il y a des tangentes de toute grandeur : la valeur de a deviendra $(b-c)\sqrt{(1+\tang^2\varphi)}$ ou $(b-c)\sec\varphi$, ou enfin, en rendant la formule propre au cas où le rayon est R,

$$a=\frac{R(b-c)}{\cos\varphi},\ \tang\varphi=\frac{2\sin\frac{1}{2}A}{b-c}\sqrt{(bc)}.$$

Le calcul logarithmique pourra aisément s'appliquer : on aura d'abord $\tang\varphi$, et par suite $\cos\varphi$, puis a. Voici un exemple auquel nous appliquerons ces deux procédés. Soient $c=87{,}812$ mètres, $b=71{,}577$ mètres, $A=45°, 48$; d'où $b+c=159{,}389$ et $c-b=16{,}235$.

38.

Premier procédé.		Deuxième procédé.	
$L(c-b) =$	1,2104523	$Lc =$	1,9435539
$L \cot \frac{1}{2} A =$	10,4280485	$Lb =$	1,8547735
$C^t. L(c+b) =$	$\bar{3}$,7975416	$L(bc) =$	3,7983274
$L \tan n =$	9,4360424	$L\sqrt{(bc)} =$	1,8991637
d'où $m =$	77°, 26	$L2 =$	0,3010300
$n =$	16°, 9618	$L \sin \frac{1}{2} A =$	9,5436354
puis $C =$	94°, 2218	$C^t. L(c-b) =$	$\bar{2}$,7895477
$B =$	60°, 2982	$L \tan \varphi =$	10,5333768
$Lc =$	1,9435539	d'où $\varphi =$	81°,8646
$L \sin A =$	9,8163493	$LR(c-b) =$	11,2104523
$C^t. L \sin C =$	10,0017916	$C^t. L \cos \varphi =$	10,5512428
$La =$	1,7616948	$La =$	1,7616951

Ces deux résultats donnent $a = 57,769$ mètres.

4°. *Étant donnés trois côtés.* Pour obtenir l'un des angles, tel que A, il faut encore recourir à l'équation D, qui donne

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Or, cette expression présente le même inconvénient que dans le cas précédent, parce qu'elle ne se prête pas au calcul logarithmique. Mais si on met pour $\cos A$ cette valeur dans $\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}(1 - \cos A)$, on trouve

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc};$$

et comme le numérateur est la différence de deux carrés (97, 3°.), il vient en rétablissant le rayon R,

$$\sin \tfrac{1}{2} A = R\sqrt{\left\{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}\right\}}$$

Cette équation remplit déja le but proposé; mais elle devient encore plus simple en représentant le périmètre du triangle par $2p = a + b + c$; car on obtient

$$\sin \tfrac{1}{2} A = R \sqrt{\left\{ \frac{(p-b)\,(p-c)}{bc} \right\}} \;.\;. \;(4)$$ 38.

$\frac{1}{2} A$ doit être $< 100°$, et la question n'a qu'une solution (351).

Soient, par exemple, $c = 103,357$ mèt., $b = 106,836$ mèt. et $a = 142,985$ mèt.; d'où $2p = 353,178$ mèt. et $p-b = 69,753$ m., $p-c = 73,232$ m., $p-a = 33,604$ m. Donc

$L(p-b) = 1,8435629$	$L(p-a) = 1,5263910$
$L(p-c) = 1,8647009$	$L(p-c) = 1,8647009$
$C^t.\ Lb = \bar{3},9712824$	$C^t.\ La = \bar{3},8447094$
$C^t.\ Lc = \bar{3},9856601$	$C^t.\ Lc = \bar{3},9856601$
somme $= \bar{1},6652063$	somme $= \bar{1},2214614$

On prend la moitié et on ajoute 10, et il vient

$L \sin \frac{1}{2} A = 9,8326031$	$L \sin \frac{1}{2} B = 9,6107307$
Donc $A = 95°, 2336$	$B = 53°, 5187$

On trouvera de même $C = 51°, 2477$; et le calcul se vérifie par la condition $A + B + C = 200°$.

5. *Quelques propositions de Géodésie.*

365. La plupart des problèmes de Géodésie se réduisent à des résolutions de triangles, qui maintenant ne peuvent présenter de difficultés. Nous en offrirons ici quelques-uns qui sont remarquables et d'un usage fréquent.

I. *Trouver la distance* AC *entre deux points l'un et* 182. *l'autre inaccessibles.* On mesurera une base quelconque BD, et les angles que font avec elle les rayons dirigés de ses extrémités B et D, vers A et C: on résoudra les triangles ABD et CBD, (364, 1°.); ce qui donnera *les distances* AB BC *du point* B *aux points inaccessibles* A *et* C, et

182. comme on connoît dans le triangle ACB deux côtés AB BC, et l'angle compris, on aura (3°.) enfin AB.

II. *Réduire un angle, un point ou une distance à l'horison.* Il est rare que les signaux soient dans un même plan horisontal ; alors ce ne sont pas les angles, les points et les distances observées qu'il faut porter dans le tracé
181. du plan, mais bien leurs *Projections horisontales* (272). Ainsi, lorsque le signal vu de A et de C est le sommet B d'un édifice ou d'une montagne, il faut substituer B' à B, l'angle $CB'A$ à CBA, l'angle ACB' à ACB....

Regardons comme connues par l'observation ou par le calcul, toutes les parties du triangle ACB ; comme CB' est horisontal, on pourra mesurer l'angle BCB' (même lorsque B' ne sera pas visible) ; puis résolvant le triangle rectangle CBB', on aura CB', et la hauteur BB'. Celle-ci et l'hypothénuse BA serviront à trouver AB', dans le triangle rectangle BAB'. Ainsi, on connoîtra les trois côtés du triangle horisontal $CB'A$, et par suite les angles qui le forment et la position du point B'. *V.* n°. 598, II.

III. Soit BC une longueur mesurée sur un terrein en
178. pente ; il ne faudra porter dans le plan que la projection AC sur l'horison, ou $a \cos C$: l'excès e de l'hypothénuse sur le côté horisontal ou $a-b$, est $e=a-a\cos C$; et comme (358), on a $1-\cos C=2\sin^2 \frac{1}{2} C$, on trouve enfin $e=2a\sin^2\frac{1}{2}C$.

182. IV. *Un triangle* ABC *étant donné, trouver le lieu d'un point* D, *en connoissant les angles* $ADC=\beta$ et $ADB=\gamma$. Soient a b c les côtés, A B C les angles donnés du triangle ABC, et les angles inconnus $ABD=x$, $ACD=y$. Les triangles ACD et ABD donnent (355),

$$DA=\frac{b\sin y}{\sin\beta}=\frac{c\sin x}{\sin\gamma}.$$

Soit déterminé un angle φ, tel que sa tangente soit 182.
$= \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}$: on aura $\text{tang}\, \varphi = \frac{\sin y}{\sin x}$, d'où on tire

$$\frac{1 + \text{tang}\, \varphi}{1 - \text{tang}\, \phi} = \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y},$$

ou plutôt (359, 360), $\text{tang}\ (50^\circ +) = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}(x + y)}{\text{tang}\, \frac{1}{2}(x - y)}$.
Faisons, pour abréger $m = \frac{1}{2}(x + y)$, $n = \frac{1}{2}(x - y)$; m est connu, puisque $x + y$ est supplément (231) de $A + CDB = A + \beta + \gamma$. On a donc

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma},\ x = m + n$$

$$\text{tang}\, n = \text{tang}\, m.\ \cot (50^\circ + \phi),\ y = m - n$$

La 1re. donne ϕ, la 3e. n; d'où on tire x, y, et la position du point D. On pourra même calculer AD CD et BD. Si tang n est négatif, n prend un signe contraire dans les valeurs de x et y. Si les points A B C D ne sont pas dans un même plan horisontal, il faut préalablement les y réduire.

Nous avions déja résolu ce problème graphiquement (208, VI).

V. *Trouver l'aire* z *d'un triangle* ABC *connoissant* 176.

1°. *Les trois côtés; V.* n°. 338.

2°. *Deux côtés et l'angle compris;* dans le triangle BCD, on a $BD = a \sin C$; ainsi, $z = \frac{1}{2} b \times BD$ devient . . . . $z = \frac{1}{2} ab \sin C$.

Soit un quadrilatère $ABCD$ dont on connoît les dia- 182.
gonales et l'angle θ qu'elles forment entre elles : on cherchera séparément l'aire de chaque triangle, et on aura $z = \frac{1}{2}(a + b)(c + d) \sin \theta$, en désignant par a, b et c, d les parties AO OD OB OC des diagonales.

176. 3°. *Un côté et les angles* ; comme $a = \frac{b \sin A}{\sin. B}$, en mettant cette valeur dans $z = \frac{1}{2} a\, b \sin C$, il vient $z = \frac{1}{2} b^2 . \frac{\sin A \sin C}{\sin B}$.

174. VI. Soit un quadrilatère $ABCD$, désignons par a, b et c, d les côtés et par (ab), (bc)..... les angles formés par les côtés a et b, b et c,.... En projetant AD DC et BC sur AB, on a $AE = d \cos (ad)$, $EF = c \cos (ac)$, $FB = b \cos (ab)$; et comme $AB = a = AE + EF + FB$, on obtient

$$a = b \cos (ab) + c \cos (ac) + d \cos (ad)$$

de même

$$b = a \cos (ab) + c \cos (bc) + d \cos (bd)$$
$$c = a \cos (ac) + b \cos (bc) + d \cos (cd)$$
$$d = a \cos (ad) + b \cos (bd) + c \cos (cd)$$

en remarquant que les projections qui sont soustractives ont pour facteurs des cosinus négatifs.

Multiplions ces équations respectives par $a\ b\ c\ d$, puis de la première, retranchons la somme des trois autres; il viendra

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2\{bc \cos (bc) + bd \cos (bd) + cd \cos (cd)\}$$

on auroit aussi

$$c^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2\{ab \cos (ab) + ad \cos (ad) + bd \cos (bd)\}$$

Et ainsi des autres côtés.

Le même calcul s'applique au pentagone, etc. En général, *dans tout polygone plan, le carré d'un côté quelconque est égal à la somme des carrés des autres côtés, moins deux fois les produits deux à deux de ceux-ci, par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

CHAPITRE III.

ANALYSE APPLIQUÉE AUX COURBES ET EN PARTICULIER A LA LIGNE DROITE ET AU CERCLE.

1. *Équation de la Ligne droite.*

366. NOUS avons vu (333) que la position d'un point 183.
M sur un plan est déterminée par ses coordonnées ; on peut de même donner le cours d'une ligne, droite ou courbe, par une équation. *On nomme équation d'une ligne* BMZ, *la relation qui a lieu entre les coordonnées* x *et* y *de chacun de ses points :* de sorte que si on conçoit que l'ordonnée *PM* se meut parallèlement en glissant le long de *Ax*, et que sa longueur varie en même tems que celle de l'abscisse, de manière que cette équation entre x et y soit toujours satisfaite, l'extrémité *M* de l'ordonnée décrira la courbe.

On peut envisager l'équation de la courbe comme renfermant deux inconnues x et y; chaque valeur qu'on prendra arbitrairement pour x, donnera au moins une valeur correspondante pour y; $x=a$; répondra à $y=b$, $x=a'$ à $y=b'$,.... cette équation indéterminée fera donc connoître une infinité de points ; le système de tous ces points est la courbe même ; et on peut employer ce procédé pour en trouver divers points, s'assurer de la figure qu'elle affecte et des particularités que présente son cours. C'est ce qu'on verra souvent par la suite.

170. C'est ainsi que $y = b$ est visiblement l'équation d'une droite MN parallèle à l'axe Ax, AQ étant $= b$: $y = o$ est l'équation de l'axe des x. De même, $x = a$ est celle de PM parallèle à l'axe Ay, AP étant $= a$; et $x = o$ est celle de cet axe lui-même.

367. Maintenant cherchons l'équation d'une droite quelconque,

184. 1°. Si elle passe par l'origine, telle que AN, en quelque point $D, N, \ldots$ qu'on abaisse les ordonnées DC, $PN, \ldots$ on aura toujours $\frac{DC}{AC} = \frac{PN}{AP} = \ldots$ Soit donc *a le rapport constant de chaque abscisse à son ordonnée*, l'équation de la droite AN sera

$$y = ax.$$

Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, comme dans l'un quelconque APN de ces triangles, on a (354), $PN = AP \tan A$; on voit que *a désigne aussi la tangente de l'angle que la droite fait avec l'axe des* x. Plus l'angle NAP croît, plus a augmente : si la droite, telle que AN' fait un angle obtus du côté des x positifs, a devient négatif, et l'équation prend la forme $y = -ax$; mais ici a est la tangente de l'angle $N'AE$.

Mais si l'angle yAx n'est pas droit, le triangle NAP donne $\frac{\sin NAP}{\sin ANP} = \frac{y}{x} = a$: donc alors *a est le rapport des sinus des angles que la droite fait avec les axes coordonnés.*

2°. Si la droite est quelconque telle que BM, en faisant $AB = b =$ *l'ordonnée à l'origine*, et menant AN parallèle à BM, l'ordonnée PM ou y se compose de $MN = b$ et de $PN = ax$; donc on a

$$y = ax + b.$$ 184.

b seroit négatif si la droite étoit telle que $B'M'$.

368. Les quantités x et y qui entrent dans l'équation d'une droite, sont appelées *Variables*; a et b sont des *Constantes* : mais on sent que a et b pourroient varier eux-mêmes, et c'est ce qui arrive lorsqu'on fait prendre à la droite BM une autre position. On veut seulement désigner par là que a et b restent les mêmes, lorsque la ligne étant fixe, on passe d'un point à un autre. $y=ax+b$ appartient à toutes les droites, et elles ne se doivent distinguer entre elles que par les valeurs qu'il convient de prendre pour a et b.

L'équation la plus générale du premier degré . . . . . $Ay + Bx + C = 0$, équivaut à $y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A}$, qu'on peut écrire $y = ax + b$. Prenant $AB = b$, et menant BM de sorte que l'angle BEA ait a pour tangente, la ligne BM aura $y = ax + b$ pour équation; on voit donc que *toute équation du premier degré appartient à une droite.* On peut aussi la tracer en déterminant deux points de la ligne, à l'aide de deux abscisses quelconques $AC = m$, $AP = n$.

Puisqu'en B l'abscisse est nulle, *en faisant* $x = 0$, *on doit trouver l'ordonnée à l'origine; de même*, $y = 0$ *donne le point où la ligne coupe l'axe des* x. Ceci est général quelle que soit la ligne, droite ou courbe. On peut donc se servir de ce théorême pour tracer facilement la droite : $x = 0$, donne $y = b = AB$; de même $y = 0$, donne $x = -\frac{b}{a} = AE$. Par les points E et B ainsi déterminés, on mènera EB qui sera la ligne cherchée.

Cependant si la ligne passoit par l'origine, ce procédé seroit insuffisant : mais on feroit $x = 1 = CA$, et on en

184. concluroit $y = a = CD$. Il sera bon de s'exercer à décrire les droites qui répondent à des équations données, telles que $2y + x = 2$, $y = -3 + x$, $y = -x - 1$, etc..... afin de reconnoître aisément la disposition d'une droite d'après l'équation qui lui appartient.

369. *Trouver l'équation d'une droite qui passe par deux points donnés.* Soient x', y' les coordonnées du premier point, ce que nous exprimerons dorénavant ainsi, le point (x', y'); soit de même $(x''\ y'')$ le second point. L'équation de la ligne est $y = ax + b$, a et b sont inconnus; or, puisque la droite passe par le point $(x'\ y')$, si on fait $x = x'$, on devra trouver $y = y'$, partant

$$y = ax + b \text{ devient } y' = ax' + b$$

retranchant pour éliminer b, on trouve

$$y - y' = a\ (x - x') \ldots (1)$$

C'est l'équation qui appartient à toutes les droites qui passent par le point $(x'\ y')$, et qui ne sont distinguées entre elles que par la valeur de a.

Mais notre droite passe aussi par le point $(x''\ y'')$; on trouve de même $y'' - y' = a\ (x'' - x'')$, d'où on tire

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \text{ et } y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\ (x - x')$$

370. *Trouver l'angle que forment deux droites entre elles*, ces droites étant données par leurs équations. . .
185. $y = ax + b$, $y = a'x + b'$; soient BC la première, α l'angle qu'elle fait avec Ax; DC la seconde. Menons BE parallèle à DC, l'angle $EBx = \alpha'$ est celui que DC fait avec Ax; ainsi $a = \text{tang}\ \alpha$, $a' = \text{tang}\ \alpha'$; l'angle cherché est $V = \alpha - \alpha'$. Or on a (359) $\text{tang}\ V = \dfrac{\text{tang}\ \alpha - \text{tang}\ \alpha'}{1 + \text{tang}\ \alpha\ \text{tang}\ \alpha'}$;

donc $$\tang V = \frac{a - a'}{1 + aa'} \ldots\ldots (2)$$ 185.

si $a = a'$ les deux droites sont parallèles puisque $V = 0$, ce qui est d'ailleurs visible. Si $aa' + 1 = 0$, $\tang V = \infty$, ainsi l'angle V est droit ; donc la condition, pour que deux droites soient parallèles ou perpendiculaires, est

$$a = a' \ldots\ldots (3) ; \quad aa' + 1 = 0 \ldots\ldots (4)$$

371. *Par un point donné, mener une droite qui soit parallèle, ou perpendiculaire à une autre droite, ou qui fasse avec elle un angle connu.* Soient $y = ax + b$ l'équation de la droite donnée, $y = a'x + b'$ celle de la droite inconnue, il faut en déterminer a' et b'. D'abord, puisque celle-ci passe par le point donné (x', y'), on a

$$y - y' = a'(x - x').$$

Si la droite doit être parallèle à la première, on fera $a = a'$; si elle doit lui être perpendiculaire, on fera .. $aa' + 1 = 0$ ou $a' = -\frac{1}{a}$; si elle doit enfin faire avec elle un angle dont la tangente soit donnée et $= m$, on aura $m = \frac{a - a'}{1 + aa'}$; d'où $a' = \frac{a - m}{am + 1}$. Ainsi l'équation cherchée sera

(5). . $y - y' = a(x - x')$. . . . . si la droite doit être parallèle.

(6). . $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$. . si elle doit être perpendiculaire.

(7). . $y - y' = \frac{a - m}{am + 1}(x - x')$ si elle doit faire un angle donné.

(8). . $y - y' = \frac{a - 1}{a + 1}(x - x')$ si elle doit faire un angle de 50°.

372. *Trouver le point de rencontre de deux droites données.* Soient $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ leurs équations. L'x peut bien être le même pour ces lignes dans toute leur étendue; mais alors l'y diffère; et réciproquement. Le point où elles se coupent est le seul pour lequel x et y soient les mêmes. Si donc on élimine ces variables, on aura les coordonnées du point de rencontre : ce calcul est facile; il donne $x = \frac{b' - b}{a - a'}$, $y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}$.

En général, si on élimine x et y entre les équations de deux lignes droites ou courbes, on obtiendra les coordonnées de leurs points d'intersection, c'est même pour cela qu'en faisant $y = 0$, ou $x = 0$, dans l'équation d'une ligne, on trouve les points où elle coupe les axes coordonnés des x ou des y, car ces équations sont celles de ces axes.

186. 373. *Trouver la distance entre deux points donnés.* Soient (x', y'), (x'', y'') ces deux points situés en M et N. Menons MR parallèle à Ax, et le triangle rectangle NMR donnera $MN^2 = MR^2 + RN^2$: or, on a . . . . . . $NR = NQ - MP = y'' - y'$; $MR = AQ - AP = x'' - x'$; ainsi la distance cherchée $MN = \delta$ est

$$\delta = \sqrt{((x'' - x')^2 + (y'' - y')^2)} \dots\dots (9)$$

De même, la distance AM du point M à l'origine est $\delta = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$.

Si les deux points devoient être situés sur une droite BN donnée par son équation $y = ax + b$; $x'\ y'$, $x''\ y''$ devroient satisfaire à cette équation, d'où $y' = ax' + b$, $y'' = ax'' + b$, et par conséquent $\delta = (x'' - x')\sqrt{(1 + a^2)}$.

187. 374. *Trouver la distance d'un point à une ligne donnée.* Soient $y = ax + b$ l'équation de la droite BC, M ou $M'(x'\ y')$ le point. Il faut 1°. abaisser la perpendiculaire MM' sur BC; 2°. chercher le point N de rencontre

de ces lignes; 3°. mesurer la distance MN ou $M'N = \delta$. 187.
Pratiquons ces opérations en analyse. 1°. l'équation de la droite indéfinie MM' qui passe par le point (x', y'), et qui est perpendiculaire à BC, est $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$. 2°. On éliminera x et y entre les équations des deux droites, et on aura les coordonnées du point N d'intersection. 3°. Enfin on mettra ces valeurs dans la formule (9).

Mais puisqu'on cherche plutôt $x - x'$ et $y - y'$ que x et y, le calcul se simplifie en préparant l'équation $y = ax + b$, et la mettant sous la forme suivante :

$$y - y' = a(x - x') + b + ax' - y' \; ; \; y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \; ;$$

l'élimination donne $x - x' = \dfrac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2}, \ldots$
$y - y' = -\dfrac{y' - ax' - b}{1 + a^2}$: la somme des carrés de ces quantités est $\left(\dfrac{y' - ax' - b}{1 + a^2}\right)^2 (1 + a^2)$, donc on a

$$\delta = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{(1 + a^2)}}$$

pour la distance cherchée ou la longueur MN ou MN' de la perpendiculaire (*).

(*) $\sqrt{(1 + a^2)}$ comporte le signe $\pm$; mais il suit de ce qu'on a dit (108) que δ devant être positif, il faut préférer ou $+$ ou $-$, de sorte qu'il en résulte que δ ait le signe $+$. Or l'ordonnée du point R ou R' de BC qui a x' pour abscisse, étant $y = ax' + b$, suivant que le point donné sera en M ou en M', c'est-à-dire, en dessus ou en dessous de la ligne, on aura $y' >$ ou $< ax' + b$. Donc, dans le premier cas, on prendra $+\sqrt{(1 + a^2)}$, et dans le second.... $-\sqrt{(1 + a^2)}$: celui-ci donne $\delta = \dfrac{ax + b - y'}{\sqrt{(1 + a^2)}}$.

187. 375. En général, les problèmes relatifs à la ligne droite sont de deux sortes :

1°. Ou une droite étant donnée, on cherche celui de ses points qui satisfait à une condition exigée. Soit alors (x', y') le point cherché, a et b sont connus dans $y' = ax' + b$; de plus la condition à laquelle le point doit satisfaire étant traduite algébriquement, on a une seconde rélation entre x' et y'. L'élimination fait donc connoître ces coordonnées. On pourroit avoir plusieurs droites et plusieurs conditions données ; mais les choses auroient encore lieu d'une manière analogue.

2°. Ou on cherche une droite qui satisfasse par sa position à de certaines conditions; alors a et b sont inconnus dans $y = ax + b$, et le problème consiste à les déterminer. Or, les conditions données, traduites en analyse, conduiront à des équations qui feront connoître a et b : elles ne pourront être qu'au nombre de deux, à moins qu'elles ne comportent elles-mêmes de nouvelles inconnues.

376. Voici plusieurs exemples où ces principes sont appliqués.

188. I. Partager en deux parties égales l'angle que forment entre elles deux droites données AB, AC. Traçons deux axes rectangulaires Ax, Ay, par le point A de concours des lignes : leurs équations sont $y = ax$, $y = bx$, a et b étant donnés. Soit $y = kx$ celle de la droite cherchée AD; il s'agit de trouver k.

Cela posé, l'angle DAB a pour tangente $\frac{a-k}{1+ak}$; celle de l'angle DAC est $\frac{k-b}{1+bk}$: ces angles doivent être égaux ; donc $\frac{a-k}{1+ak} = \frac{k-b}{1+bk}$, d'où

$$k^2 - \frac{2(ab-1)}{a+b}k - 1 = 0.$$ 188.

On tire de là la valeur de k, et on la substitue dans $y = kx$. La solution est double à cause des deux racines réelles k' et k''; comme le dernier terme -1 est leur produit, on a $k'k'' + 1 = 0$, ce qui apprend que les deux lignes AD, AE ainsi obtenues sont à angle droit.

Si les axes étoient donnés de manière à ne pas passer en A; l'équation cherchée seroit $y - y' = k(x - x')$, k ayant la valeur ci-dessus, et x' y' étant les coordonnées du point de concours.

Si l'une des droites AC est sur l'axe des x, $b = 0$ et on a simplement $k^2 + \frac{2k}{a} = 1$.

II. Etant données les droites AB, Ax et la perpendiculaire BE sur Ax, déterminer sur BE, un point D tel qu'en menant CD parallèle à Ax, on ait $CD = AC$. Soient A l'origine, Ax l'axe des x, et $y = ax$ l'équation de AB, le point inconnu C (x', y'), $AE = m$, enfin $y = kx$ l'équation de la droite inconnue AD; comme elle passe en D (m, y'), on a $y' = km$. 189.

Or, $AC^2 = x'^2 + y'^2$ et $CD = m - x'$; donc par condition $x'^2 + y'^2 = (m - x')^2$ ou $y'^2 = m^2 - 2mx'$: de plus $y' = ax'$, parce que le point C est sur AB. Eliminant x', il vient $ay'^2 + 2my' = am^2$; et enfin mettant km pour y', on a $ak^2 + 2k = a$: équation qui comparée à celle du problême précédent prouve que AD divise l'angle BAE en deux parties égales; ce qui résout le problême par une construction simple. Il y a deux solutions données l'une par AD, l'autre par sa perpendiculaire KD'.

III. Etant donné le triangle ABC; trouver les équations 190.

190. des perpendiculaires AF, BE, CD menées de chaque angle sur le côté opposé. Prenons la base $AB=b$ pour axe des x, A pour origine; le sommet C (x', y') détermine le triangle.

La droite AC a pour équation $y=ax$, a étant $\frac{y'}{x'}$ parce qu'elle passe en C. Il est aisé d'avoir de même celle de la droite BC menée par C (x', y') et B (b, o); on a donc pour les équations de AC et BC

$$y=\frac{y'}{x'}x, \quad y=\frac{y'}{x'-b}(x-b).$$

De plus BE passe en B (b, o), AF par l'origine; leurs équations sont donc de la forme $y=A(x-b)$, $y=Bx$; la condition d'être perpendiculaires aux précédentes donne $\frac{Ay'}{x'}+1=o$, $\frac{By'}{x'-b}+1=o$, (370); donc les équations des perpendiculaires sont

$$y=-\frac{x'}{y'}(x-b), \quad y=-\frac{x'-b}{y'}x.$$

Pour trouver le point O où elles se coupent, il faut éliminer x et y; on trouve $x=x'=$ l'abscisse AD du sommet; ainsi ce point O est sur l'ordonnée CD. Donc *les perpendiculaires abaissées des trois angles d'un triangle sur les côtés opposés se coupent en un même point*. En décrivant sur AB la demi-circonférence $AEFB$, et par les points F, E d'intersection, menant AF et BE, puis enfin par le point O de concours traçant CD, on aura les trois perpendiculaires.

191. IV. Etant donné l'angle MAx et le point N, mener par ce point une droite NQ, telle que l'aire du triangle AMQ soit donnée. Prenons Ax, Ay pour axes; menons

NB parallèle à AM; faisons $AB = m$, $ND = \beta$, tang B=tang $MAQ = a$; ce sont les données du problême; $AQ = z$ est l'inconnue. 191.

L'équation de BN est $y = a(x + m)$, car elle passe en $B(-m, 0)$: en faisant $y = \beta$, on a pour l'abscisse du point N, $AD = \frac{\beta - am}{a}$. L'équation de AM est $y = ax$; celle de NQ, qui passe en $Q(z, 0)$ est . . $y = A(x - z)$, et comme elle passe aussi en . . . . $N\left(\frac{\beta - am}{a}, \beta\right)$ on a

$$A = \frac{\beta a}{\beta - a(m + z)}.$$

En éliminant x, on trouve pour l'ordonnée PM du point d'intersection de ces droites, ou la hauteur du triangle AMQ, $y = \frac{aAz}{A - a} = \frac{\beta z}{m + z}$.

Cela posé, quelle que soit l'aire donnée, on pourra toujours la transformer en un rectangle dont la hauteur seroit $DN = \beta$, et dont k seroit la base. On devra donc avoir $k\beta = \frac{1}{2} zy$, ou $z^2 - 2kz = 2km$; ce qui donne deux solutions $z = k \pm \sqrt{k(k + 2m)}$, faciles à construire, et dont la seconde a lieu pour l'angle BAM, (332). *Voy.* aussi n°. 337, 4°.

On pourra s'exercer sur les problêmes suivans.

V. Etant données les équations de deux droites AB, AC, prendre des parties égales AB, AC, calculer la longueur BD de la moitié de la corde BC, et en conclure l'angle BAC. La formule doit s'accorder avec (2), n°. 370. 188.

VI. Dans la même circonstance chercher l'équation de la corde BC et celle de sa perpendiculaire AD, dont la direction doit s'accorder avec le problême I. 188.

192. VII. Trouver les équations des lignes GE, AF, BD menées des milieux des côtés du triangle ABC aux angles opposés; prouver qu'elles concourent en un même point G qui est aux $\frac{2}{3}$ de chacune à partir du sommet de l'angle.

2. *Du Cercle.*

193. 377. La distance R d'un point M (x, y) à l'origine C est $R = \sqrt{(x^2 + y^2)}$; on voit que l'équation du cercle est

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

puisqu'elle exprime que, pour tous ses points, la distance à l'origine, est constamment $= R$.

Le même raisonnement prouve que

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

est l'équation d'un cercle, dont le centre a pour coordonnées α et β. De sorte que si l'origine est à l'extrémité O du diamètre $\alpha = R$, $\beta = 0$, et on a $(x - R)^2 + y^2 = R^2$, ou plutôt $y^2 = 2Rx - x^2$, etc....

Il est bon de s'exercer à reconnoitre la figure d'une courbe et ses propriétés d'après son équation : c'est pourquoi, bien que ces choses soient connues pour le cercle, nous allons profiter d'un exemple aussi simple pour mieux faire voir le parti qu'on peut tirer des équations des courbes.

193. 378. Comme $y = \pm\sqrt{(R^2 - x^2)}$, à chaque abscisse répondent deux ordonnées égales et de signe contraire; de sorte que la courbe est coupée par Ox en deux parties qui coïncident lorsqu'on plie la figure suivant Ox. La même chose a lieu pour Oy. En faisant $x = 0$, on a $y = \pm R$ et deux points y et D de la courbe; plus x croît, plus $\sqrt{(R^2 - x^2)}$ ou y décroît, jusqu'à $x = R$, où $y = 0$;

ainsi la courbe yMA s'abaisse sur l'axe des x, qu'elle rencontre en A. Elle ne s'étend pas au-delà de CA, car y devient imaginaire. De ces notions résulte la figure de la courbe. 193.

Toute droite OM menée par le point O $(-R, o)$ a pour équation $y = a(x + R)$; de même pour A $(+R, o)$, on a $y = a'(x - R)$ qui est l'équation de MM. Le point M de rencontre de ces lignes a pour coordonnées . . . $x = \frac{a' + a}{a' - a} R, y = \frac{2aa'R}{a' - a}$; pour que ce point soit situé sur la circonférence, il faut que l'équation $x^2 + y^2 = R^2$ soit satisfaite par ces valeurs. Ainsi $aa'(1 + aa') = o$ est l'équation de condition qui exprime que les deux cordes se coupent sur la circonférence. On en tire $a = o$ ou $a' = o$, ou enfin $1 + aa' = o$: les deux premières expriment que lorsqu'une des cordes est couchée sur le diamètre, la condition est satisfaite, ce qui n'apprend rien : l'autre . . . $1 + aa' = o$, indique que l'une des cordes ayant une direction quelconque, si l'autre lui est perpendiculaire, le point d'intersection sera sur la circonférence. 193.

Comme $y^2 = R^2 - x^2 = (R + x)(R - x)$, et que $R + x = OP$, $R - x = AP$, PM est moyen proportionnel entre OP et PA.

La longueur de la corde AM est $\sqrt{(y^2 + (R - x)^2)}$; ainsi $AM^2 = 2R^2 - 2Rx = 2R(R - x)$; AM est donc moyen proportionnel entre AP et le diamètre AO.

379. Par un point $M(\alpha, \beta)$, menons une droite quelconque MN; $y - \beta = a(x - \alpha)$ est son équation ; la distance δ de M aux points N et K d'intersection est donnée par $\delta^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$; de sorte qu'en éliminant x et y entre ces deux équations, il vient 194.

$$y - \beta = \frac{a\delta}{\sqrt{(1 + a^2)}}, \quad x - \alpha = \frac{\delta}{\sqrt{(1 + a^2)}},$$

194. On en tire aisément les coordonnées de N et de K; mais comme ces points sont sur la circonférence, on a . . . . $x^2+y^2=R^2$, ou

$$\delta^2+\frac{\alpha+a\beta}{\sqrt{(1+a^2)}}\times 2\delta+\alpha^2+\beta^2-R^2=0.$$

On voit que δ dépend de a, c.-à-d. de la direction de MN.

1°. Si M est donné sur la courbe, tel qu'en K, on a $\alpha^2+\beta^2=R^2$, et par conséquent $\delta=0$ et . . . . $\delta=-\dfrac{\alpha+a\beta}{\sqrt{(1+a^2)}}=KN$. Or si cette longueur est nulle, la droite est tangente; la valeur correspondante de a est $a=-\dfrac{\alpha}{\beta}$; $y-\beta=a\,(x-\alpha)$ devient (à cause de $\alpha^2+\beta^2=R^2$)

$$\beta y+\alpha x=R^2,$$

qui est l'équation de la tangente MT en un point quelconque $T\,(\alpha,\beta)$ pris sur la circonférence.

Le rayon CT mené au point de tangente, a pour équation $y=a'x$; mais comme il passe en $T(\alpha,\beta)$, on a $a'=\dfrac{\beta}{\alpha}$ donc $aa'+1=0$; ce qui prouve que le rayon TC est perpendiculaire sur TM.

2°. Si, par le point extérieur $M\,(\alpha,\beta)$, on veut mener une tangente MT, il faut trouver les coordonnées du point de contact T; elles doivent satisfaire aux équations $x^2+y^2=R^2$ et $\beta y+\alpha x=R^2$, du cercle et de la tangente : l'élimination donneroit x et y. Mais remarquons que ces coordonnées doivent satisfaire à la différence de ces équations, ou $y^2-\beta y+x^2-\alpha x=0$, qu'on peut écrire ainsi

$$(y-\tfrac{1}{2}\beta)^2+(x-\tfrac{1}{2}\alpha)^2=\tfrac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2);$$

Or cette équation est celle d'un cercle dont le centre est en $m(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta)$, et le rayon $= \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\beta^2)}$; si donc on prend $Cp = \frac{1}{2} CP$, $pm = \frac{1}{2} PM$; m sera le centre, et Cm sera le rayon d'un cercle qui passera par le point de contact cherché ; ce qui reproduit la construction connue. 194.

3°. La sécante MN donne pour δ deux valeurs KM et MN; le produit des deux racines (137, 2°.) est le dernier terme $\alpha^2 + \beta^2 - R^2$, quantité $= MK \times MN$: or elle est indépendante de a, de sorte que, pour une autre sécante MQ, on a aussi $\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = MQ \times MI$; et par conséquent, que le point M soit intérieur ou extérieur au cercle, sous quelqu'angle que les lignes se coupent, on a

$$MK \times MN = MQ \times MI.$$

De plus le triangle rectangle CMT donne $MT^2 = CM^2 - R^2$ ou $= \alpha^2 + \beta^2 - R^2$; donc $MK \times MN = MT^2$: ce qui complète la théorie de ces lignes (221, ...).

Si CM est l'axe des x, $\beta = 0$ et les deux valeurs de δ ont pour différence la corde

$$NK = m = 2\sqrt{\left\{\frac{R^2 + a^2(R^2 - \alpha^2)}{1 + a^2}\right\}}.$$

En tirant de là la valeur de a, on connoîtra la direction que la ligne MN doit prendre pour que la corde NK ait la longueur donnée m.

380. Soient deux cercles C et C', l'origine étant en C, $CC' = a$ étant sur l'axe des x, leurs équations sont $x^2 + y^2 = R^2$ pour C; et $(x - a)^2 + y^2 = R'^2$ pour C'. En éliminant x et y, on a pour les points d'intersection 26.

$$x = \frac{a^2 + R^2 - R'^2}{2a},\ y = \pm \frac{\sqrt{\{4a^2R^2 - (a^2 + R^2 - R'^2)^2\}}}{2a}$$

L'abscisse étant simple et l'ordonnée double, la ligne CC' qui joint les centres, est perpendiculaire sur le milieu de la corde MN.

Lorsque $2aR = a^2 + R^2 - R'^2$ ou $R'^2 = a^2 - 2aR + R^2$,
ou enfin $R' = \pm (a - R)$, on a $y = 0$, d'où $x = 0$; les
cercles n'ont qu'un point de commun, situé sur la ligne CC'
27. qui joint les centres : on voit que cela a lieu soit quand
$R + R' = a$, soit lorsque $R - R' = a$.

Suivant que $2aR$ est $>$ ou $< a^2 + R^2 - R'^2$, le radical est réel ou imaginaire : or ces conditions se réduisent
28. à $R' >$ ou $< \pm (a - R)$. Dans le premier cas $R + R' > a$
ou $R - R' < a$; l'une de ces deux conditions entraîne l'autre
car $R + R' = a + \alpha$, réduit $2aR > a^2 + R^2 - R'^2$ à
$2R' > \alpha$, ou plutôt $R - R' < a$, à cause de $\alpha = R + R' - a$.

Dans le second cas $R + R' < a$, ou $R - R' > a$, et l'une de ces conditions suffit, car $R \pm R' = a \mp \alpha$ donne la suivante $0 < \alpha + 2R'$, qui est satisfaite d'elle-même. On retrouve ainsi les relations connues (192) entre les rayons R et R' de deux cercles et la distance de leurs centres, pour qu'ils se touchent, se coupent ou n'aient aucun point de commun.

381. Voici quelques autres problèmes à résoudre.

I. Etant donnés une droite et un cercle, mener une tangente parallèle à cette droite.

II. Mener une tangente à deux cercles donnés.

III. Etant donnés un angle et un cercle, tracer une circonférence tangente au cercle et aux deux droites (le centre est sur la ligne qui divise l'angle donné en deux parties égales).

3. *Transformation de Coordonnées.*

382. L'équation d'une courbe est quelquefois si composée qu'il est difficile d'en déduire les propriétés : mais il arrive souvent que cette complication tient aux axes coordonnés auxquels la courbe est rapportée. On a vu, par exemple, que le cercle a pour équations . . . . . .

$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=R^2$, $y^2=2Rx-x^2$, $x^2+y^2=R^2$; celle-ci n'est plus simple que parce que l'origine est au centre. Il convient donc de savoir transformer l'équation d'une courbe, de manière à la rapporter à d'autres axes, afin de simplifier les formules.

Les axes coordonnés étant Ax Ay, et formant un 195.
angle quelconque, supposons qu'on veuille prendre d'autres axes $A'x'$ $A'y'$ parallèles aux premiers. Soient $AB=a$, $BA'=b$, les coordonnées de la nouvelle origine; $AP=x$, $PM=y$, celles d'un point M; $A'C=x'$, $CM=y'$ les nouvelles coordonnées. On a $AP=BP+AB$, $PM=MC+CP$; ou

$$x=x'+a,\ y=y'+b\ldots\ (A).$$

Ces valeurs substituées dans l'équation en x et y d'une courbe, la traduiront en x' et y', et l'origine sera transportée en A' (a,b); a et b doivent d'ailleurs avoir des signes dépendant de la position de la nouvelle origine A' relativement aux premiers axes : en sorte que si elle étoit située en D, a seroit positif et b négatif, et il faudroit faire $x=x'+a$, et $y=y'-b$, etc.

383. Supposons que Ax Ay étant les axes rectangu- 196.
laires, on veuille, sans changer l'origine A, en prendre d'autres, tels que Ax' Ay'. Désignons par (xx') l'angle xAx' que forment les axes des x et x'; de même par (xy') l'angle xAy'..... Pour un point quelconque M, $AP=x$, $PM=y$, $AL=x'$, $ML=y'$: il s'agit d'exprimer x et y en x', y' et les angles donnés (xx'), (xy') qui déterminent la position des nouveaux axes. On a $x=AK+LI$, ainsi *l'abscisse* x *est la projection sur l'axe des* x *de la portion de polygone* ALM; de même $y=LK+IM$. Or, les triangles AKL LIM donnent (354, A).

196. $AK = x' \cos(xx')$, $KL = x' \sin(xx')$
$LI = y' \cos(xy')$, $MI = y' \sin(xy')$.

Donc
$$\left.\begin{array}{l} x = x' \cos(xx') + y' \cos(xy') \\ y = x' \sin(xx') + y' \sin(xy') \end{array}\right\} \ldots (B)$$

197. Si les nouveaux axes sont aussi à angle droit, $(xy') = 90° + (xx')$; d'où

$$\left.\begin{array}{l} x = x' \cos(xx') - y' \sin(xx') \\ y = x' \sin(xx') + y' \cos(xx') \end{array}\right\} \ldots (C)$$

c'est ce qu'on peut tirer directement des triangles AKL [illegible] LIM;

[illegible] car $AK = x' \cos(xx')$ $KL = x' \sin(xx')$
$LI = y' \sin(xx')$ $MI = y' \cos(xx')$

et de plus $x = AK - IL$, $y = LK + MI$.

196 et 197. Il est inutile de prévenir, que dans chaque cas particulier où on voudra faire usage de ces formules, il faudra avoir égard à la situation relative des axes entre eux. Ainsi lorsque l'axe des x' sera en dessous de Ax, comme AG, on devra prendre $\sin(xx')$ négatif et $\cos(xx')$ positif, etc.

196. 384. Supposons maintenant que sans changer l'origine A, les axes étant obliques Ax' Ay', on veuille les rendre rectangulaires Ax Ay : il suffira de tirer des équations B les valeurs de x' et y' en x et y. Donc

$$\left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{x \sin(xy') - y \cos(xy')}{\sin(x'y')} \\ y' = \dfrac{y \cos(xx') - x \sin(xx')}{\sin(x'y')} \end{array}\right\} \ldots (D)$$

bien entendu que dans chaque cas, il faudra comparer

la situation des axes avec celle de notre figure, et y avoir égard à l'aide des signes.

Cherchons la transformation qui sert à passer des axes obliques Ax' Ay' à d'autres aussi obliques Ax'' Ay''. Menons Ay perpendiculaire sur Ax', et rendons d'abord les axes rectangulaires suivant Ax' et Ay : pour cela, on fera $(xx')=0$ dans les équations C, et on aura 198.

$$x'=\frac{x\sin(x'y')-y\cos(x'y')}{\sin(x'y')},\ y'=\frac{y}{\sin(x'y')}.$$

Mais pour remplacer les coordonnées rectangles x et y par x'' et y'', il faut changer dans les formules B, x' et y' en x'' et y'', et substituer ici ; on a donc

$$\left.\begin{aligned} x'&=\frac{x''\sin(y'x'')+y''\sin(y'y'')}{\sin(x'y')},\\ y'&=\frac{x''\sin(x'x'')+y''\sin(x'y'')}{\sin(x'y')}.\end{aligned}\right\}\ldots(E)$$

4. *Des Coordonnées polaires.*

385. Jusqu'ici nous n'avons déterminé la position d'un point sur un plan que par ses distances à deux axes ; mais il y a bien des manières différentes de la fixer, ce qui fournit autant de systèmes coordonnés. Supposons, par exemple, qu'on connoisse les distances r et r' d'un point à deux autres donnés : en décrivant de ceux-ci comme centre des circonférences avec les rayons r et r', ce point sera situé à leur intersection. On n'emploie guères ce système coordonné, non plus que beaucoup d'autres, parce qu'ils donnent lieu à des calculs compliqués (*Voy.* Géom. de position, par Carnot, p. 423).

Arrêtons-nous aux coordonnées polaires ; elles sont

d'un fréquent usage, parce qu'elles donnent lieu à une
199. analyse facile. La position d'un point M est donnée par sa distance $AM=r$ à un point fixe A, qu'on nomme *Pôle*, et par l'angle $MAP=\theta$ que fait cette ligne AM avec une ligne fixe donnée Ax : AM est le *Rayon vecteur* du point M.

L'équation d'une courbe est la relation entre r et θ, qui a lieu pour chacun de ses points. Si le rayon AM tourne autour de A, et que sa longueur varie à mesure qu'il tourne, c.-à-d., avec θ, de manière que l'équation entre r et θ soit toujours satisfaite, l'extrémité M du rayon vecteur décrira la courbe MN.

Le triangle rectangle AMP donne, en faisant $AP=x$, $PM=y$,

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad x^2+y^2=r^2.$$

Ainsi, pour passer d'un système de coordonnées x et y aux polaires r et θ, il faudra d'abord transformer l'équation en coordonnées rectangles, si elles sont obliques; prendre pour origine le point A qui doit être le pôle; enfin la droite Ax, à partir de laquelle on compte les arcs θ, devra être l'axe des x. Ensuite on mettra $r\cos\theta$ et $r\sin\theta$ pour x et y.

Le cercle $(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=R^2$, lorsqu'on transporte l'origine au centre (α, β) a pour équation . . . $x^2+y^2=R^2$; ces substitutions donnent $r=R$, ce qui d'ailleurs est évident quel que soit θ.

Réciproquement, si on a l'équation en r et θ d'une courbe, en éliminant ces variables à l'aide des relations précédentes, on la traduira en coordonnées rectangulaires x et y.

CHAPITRE IV.

SECTIONS CONIQUES.

1. *Equations des Sections coniques.*

386. On demande l'équation de la courbe AMO qui résulte de l'intersection d'un cône droit BDI par un plan quelconque. 200.

Si par l'axe BK on fait passer un plan BDI perpendiculaire au plan coupant (il le sera à la base, n°. 272) l'intersection de ces plans sera la droite AO, *projection de l'axe du cône sur le plan coupant* : c'est ce qu'on nomme l'*Axe* de la section conique. Par un point quelconque P de cet axe, menons un plan parallèle à la base DI ; ses intersections avec le cône et le plan coupant seront le cercle FMG et la droite PM, laquelle étant perpendiculaire (273) sur FG et AO est une ordonnée commune aux deux courbes.

Cela posé, soient $AP = x$, $PM = y$; cherchons une relation entre x, y, et les données du problème qui sont l'angle $BAO = \alpha$, l'angle $DBI = \beta$ et $AB = c$. La propriété du cercle donne $y^2 = FP \times PG$; cherchons l'expression algébrique de FP et PG.

Les sinus étant proportionnels aux côtés opposés dans les triangles AFP, POG et ABO, on a

$$\frac{\sin \alpha}{\sin F} = \frac{FP}{x}, \quad \frac{\sin O}{\sin G} \text{ ou } \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin F} = \frac{PG}{PO} = \frac{PG}{AO - x}$$

200. $\frac{\sin O}{AB}$ ou $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{c} = \frac{\sin\beta}{AO}$, d'où $AO = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Or dans le triangle BHF, l'angle F est complément de $\frac{1}{2}\beta$; donc $FP = \frac{x\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta}$,

$$PG = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\beta}\left\{\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - x\right\},$$

et on a pour l'équation demandée

$$y^2 = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\left\{cx\sin\beta - x^2\sin(\alpha+\beta)\right\}\ \ldots\ (A).$$

Pour obtenir toutes les sections du cône, il suffit de faire prendre au plan coupant toutes les positions possibles, c.-à-d. de faire tourner la droite AO autour du point A, et de changer aussi $AB = c$. Il se présente trois cas.

1°. Tant que $\alpha + \beta < 200°$, le plan coupant rencontre toutes les génératrices d'un même côté du sommet; la courbe est rentrante et fermée, on la nomme *Ellipse* : c'est pour elle que l'équation précédente a lieu.

201. 2°. Lorsque $\alpha + \beta = 200°$, le plan coupant est parallèle à la génératrice BI, et la courbe s'étend à l'infini : on la nomme *Parabole* : en faisant $\sin(\alpha+\beta) = 0$, notre équation devient (G, 357)

$$y^2 = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\cdot cx = 4cx\sin^2\tfrac{1}{2}\beta,\ (*).$$

200. 3°. Enfin, lorsque $\alpha + \beta > 200°$, le plan coupant

---

201. (*) On auroit pu faire de nouveau les raisonnemens précédens; FP conserve la même valeur, en faisant $\sin\alpha = \sin\beta$, donc . . . $FP = \frac{x\sin\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta}$: de plus AL parallèle à FG donne le triangle ABL dans lequel on a $\frac{\sin\beta}{\sin BAL}$ ou $\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{AL}{BL} = \frac{PG}{c}$; etc.

rencontre les deux nappes de la surface de part et d'autre du sommet ; la courbe a donc deux branches étendues à l'infini $M'AN'\ LO'Q$, et dont la courbure est opposée ; on la nomme *Hyperbole*. Pour en obtenir l'équation, il faut faire ci-dessus $\alpha + \beta > 200^\circ$, ce qui change le sinus de signe, et on a

$$y^2 = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta} \left\{ cx \sin \beta + x^2 \sin (\alpha + \beta) \right\}.$$

387. Il n'y a rien à changer à tout ce qui vient 200.
d'être dit, lorsqu'on fait varier β et c, c.-à-d. les dimensions du cône et la distance AB. On ne peut faire $\beta = 0$, ou $\beta = 200^\circ$; car il n'y auroit plus de cône : et $c = 0$, suppose que le plan coupant passe par le sommet. Dans ce cas, l'intersection est *un point* lorsque $\alpha + \beta < 200^\circ$, *une droite* quand $\alpha + \beta = 200^\circ$, (le plan est tangent au cône) ; enfin *deux droites* quand $\alpha + \beta > 200^\circ$.

En faisant $c = 0$ dans notre équation (A), puis supposant sin ($\alpha + \beta$) positif, nul ou négatif, on trouve

$$y^2 + \frac{\sin \alpha . \sin (\alpha + \beta)}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta} x^2 = 0$$

$$y = 0,\ y^2 = \frac{\sin \alpha . \sin (\alpha + \beta)}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta} x^2.$$

La première ne peut être satisfaite qu'autant que $x = 0$ et $y = 0$, ainsi elle représente *un point* : la seconde est celle d'*une droite*, la troisième enfin est de la forme $y^2 = a^2x^2$, et donne $y = \pm\ ax$, qui représente *deux droites*.

Donc, quels que soient le cône et la position du plan coupant, l'équation (A) est celle des *six sections coniques* : c étant $= 0$, on a les trois sections qui passent par le sommet ; et lorsque c n'est point nul, 200.
cette équation *représente une ellipse*, *une hyperbole*, *ou*

une parabole, suivant que le coefficient de x^2 *est négatif, positif ou nul*; cette équation peut être exprimée par $y^2 = mx + nx^2$ qui convient à toutes ces sections.

388. Il convient de simplifier l'équation des courbes pour mieux en déduire les propriétés. Remarquons d'abord que puisque chaque abscisse répond à deux valeurs de y égales et de signes contraires, l'axe des x coupe chacune de nos trois courbes en parties égales et qui se superposent, lorsqu'on plie la figure suivant cet axe. Les points où cet axe coupe la courbe sont appelés *Sommets*.

1°. La parabole a pour équation $y^2 = 2px$, en représentant le coefficient de x par $2p$; c'est une constante connue. Il est facile de déduire la forme de la courbe de son équation $y^2 = 2px$; car x négatif, rendant y imaginaire, la courbe ne s'étend qu'à droite de
202. l'axe Ay des y : plus x croît et plus y croît, (cela jusqu'à $x = \infty$) donc la courbe n'a qu'une branche MAM', ouverte et indéfiniment étendue; et un seul sommet A.

200. 2°. Nous avons vu que $AO = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$; désignons cette valeur par $2a$: c'est ce qu'on nomme *la Longueur du grand axe*, ou la distance entre les sommets. Par là l'équation de l'ellipse devient

$$y^2 = \frac{\sin \alpha . \sin(\alpha + \beta)}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} (2ax - x^2).$$

Le facteur variable est $= (2a - x)x$; or x ne peut être négatif, ni $> 2a$, car y deviendroit imaginaire; donc
203. au-delà des sommets A et O la courbe ne s'étend point. Dans cet intervalle, plus x croît et plus $2a - x$ diminue; donc le produit croît jusqu'à ce que les deux

facteurs soient égaux (139), ce qui a lieu pour $x=a$, 203.
ou au milieu C du grand axe : passé ce point, le produit diminue, ainsi les ordonnées croissent depuis A jusqu'en B, elles décroissent ensuite, et la courbe est fermée : la plus grande ordonnée est

$$CB=y=\frac{\pm a}{\cos\frac{1}{2}\beta}\sqrt{\sin\alpha.\sin(\alpha+\beta)}.$$

Si on égale cette valeur à b, ($CB=b$ est ce qu'on nomme le *demi petit Axe*), on trouve pour l'équation de l'ellipse

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2).$$

3°. En faisant de même $AO'=2a$, l'équation de 200.
l'hyperbole devient

$$y^2=\frac{\sin\alpha.\sin(\alpha+\beta)}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\left\{2ax+x^2\right\}.$$

Lorsque x croît, y augmente jusqu'à l'infini; on a donc une branche ouverte $M'AM$, à-peu-près comme 204.
dans la parabole : lorsque x est négatif, le facteur variable $2ax+x^2$ devient $x(x-2a)$; ainsi y est imaginaire tant que x est $<2a$: la courbe ne s'étend pas entre les deux sommets A et O. Mais comme plus x croît et plus y augmente, on obtient une nouvelle branche ouverte et infinie, à partir du point O.

Comme l'équation de l'hyperbole ne diffère de celle de l'ellipse que par un signe, les simplifications que l'on fait éprouver dans les constantes de l'une, doivent convenir également à l'autre. Cherchons l'ordonnée imaginaire qui répond au milieu C de AO, en faisant $x=-a$; elle est 204.

$$y=\pm\frac{a}{\cos\frac{1}{2}\beta}\sqrt{-\sin\alpha.\sin(\alpha+\beta)}.$$

Si donc on rend cette quantité réelle, en changeant le signe sous le radical, on trouve en la représentant par b,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

b est le demi second axe de l'hyperbole ; c'est l'*ordonnée au*
203 et *centre* rendue réelle ; car on nomme *Centre* de l'ellipse
204. et de l'hyperbole le milieu C de leur axe AO.

389. L'équation générale des sections coniques, l'origine étant au sommet, est $y^2 = mx + nx^2$. Elle appartient donc,

1°. A la parabole, lorsque $n = 0$ et $m = 2p$;

2°. A l'ellipse quand $n = -\frac{b^2}{a^2}$, et $m = \frac{2b^2}{a}$;

3°. Enfin à l'hyperbole, lorsque $n = \frac{b^2}{a^2}$, $m = \frac{2b^2}{a}$.

203 et 390. Si on veut transporter l'origine au centre C, il
204. faut faire $x = x' + a$ pour l'ellipse et $= x' - a$ pour l'hyperbole, ce qui donne (en ôtant les accens)

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \text{. . . . . pour l'ellipse}$$
$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \text{. . . pour l'hyperbole.}$$

Ces courbes sont alors *rapportées à leur centre et à leurs axes* 2a *et* 2b. Comme l'une devient l'autre en changeant b en $b\sqrt{-1}$, ce simple artifice d'analyse traduira de même les résultats de calcul obtenus pour l'une en ceux qui conviennent à l'autre.

Puisque chaque valeur de y donne deux valeurs de x égales et de signes contraires, si on plie les figures suivant l'axe BD des y, les parties de la courbe coïncideront comme on a vu que cela a lieu pour l'axe des x.

2. *De la Parabole.*

391. Il résulte de la génération même de la parabole que cette courbe est une *ellipse dont le grand axe est infini.*

Soient deux points $(x'y')$, $(x''y'')$ d'une parabole, on a $y'^2 = 2px'$, $y''^2 = 2px''$, d'où $\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{x'}{x''}$: donc les *carrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses correspondantes.*

Si la constante $2p$ est inconnue, il suffit d'avoir l'abscisse et l'ordonnée d'un point de la courbe, $2p$ est troisième proportionnelle à l'abscisse et à l'ordonnée.

392. L'équation $y^2 = 2px$ donne autant de points qu'on veut de la courbe ; on peut même en déduire cette construction : prenons $AB = 2p$, et comme y 202.
est moyenne proportionnelle entre AB et x, on décrira un cercle BCP dont le centre soit en un point quelconque de l'axe AP et qui passe en B ; l'ordonnée AC de ce cercle sera l'y qui répond à l'abscisse $AP = x$; on mènera donc par C et P des parallèles aux x et y, elles détermineront le point M de la courbe. On répétera cette construction pour en obtenir d'autres points.

393. Soit pris un point arbitraire (α, β) sa distance δ à un point quelconque (x, y) de la courbe est donnée par

$$\delta^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$$
$$= x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2.$$

Déterminons α et β par la condition que δ *soit rationnel quel que soit le point de la courbe.* D'abord $y = \sqrt{(2px)}$ exprimant que le point (x, y) est sur la courbe ; en substituant, on remarque que tant que y subsistera dans δ^2

202. à la première puissance, δ ne pourra être rationnel ; ainsi le terme $2\beta y$ doit disparoître, d'où $\beta = 0$, et

$$\delta^2 = x^2 + 2x(p - \alpha) + \alpha^2 ;$$

mais ce trinome n'est un carré (138) qu'autant que $\alpha^2 = (p - \alpha)^2$ ou $\pm \alpha = p - \alpha$; donc

$$\alpha = \tfrac{1}{2} p, \quad \beta = 0, \quad \delta = x + \tfrac{1}{2} p.$$

205. On prendra donc sur l'axe Ax le point F tel que $AF = \frac{1}{2} p$, et la distance $FM = \delta$ à tous les points de la courbe sera rationnelle. Ce point F, qu'on nomme le *Foyer*, jouit seul de cette propriété.

Si on fait $x = \frac{1}{2} p$ dans l'équation $y^2 = 2px$, on trouve $y = \pm p$, ainsi *la double ordonnée* GH *qui passe par le foyer*, et qu'on nomme le *Paramètre*, est $= 2p$.

Puisque $FM = AP + \frac{1}{2} p$, si on prend $AD = \frac{1}{2} p$, la parallèle DQ aux y donnera $QM = FM$; on la nomme *Directrice* ; on voit que *tous les points de la courbe sont à la même distance du foyer et de la directrice.*

On tire de là une manière simple de construire la parabole. Après avoir marqué le foyer F et le point D, (leur distance au sommet A est $\frac{1}{2} p$ ou le quart du paramètre), on mènera une ordonnée indéfinie quelconque MM', puis du foyer F comme centre avec PD pour rayon, on décrira un arc qui coupera la droite MM' aux deux points M et M' de la courbe.

394. L'équation polaire de la parabole se trouve aisément ; car en prenant le foyer pour pôle, et y plaçant l'origine, la valeur de δ devient $r = x' + p$; puis en faisant $x' = -r \cos \theta$, θ désignant l'angle AFM, on a

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}.$$

3. *De l'Ellipse.*

395. Soient deux points $(x'y')$, $(x''y'')$ d'une ellipse ; l'origine étant au sommet A, l'équation. . . . . 203.
$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ donne $\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{(2a - x')x'}{(2a - x'')x''}$; or $AP = x$, donne $PO = 2a - x$; ainsi *les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des distances du pied de ces ordonnées aux deux sommets.*

Lorsque l'origine est au centre, l'équation est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 ;$$

or si $a = b$, elle devient $y^2 + x^2 = a^2$; donc *le cercle est une ellipse, dont les axes sont égaux.*

En changeant x en y et y en x, l'équation devient $b^2y^2 + a^2x^2 = a^2b^2$; ainsi soit qu'on prenne AO ou BD pour axe des x, l'équation de la courbe demeure de même forme.

Le cercle décrit du centre C avec le rayon AC a pour équation $Y^2 + x^2 = a^2$; mais on a pour l'ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Si on compare donc les ordonnées y et Y qui répondent à la même abscisse x, dans l'ellipse et le cercle, on a $y = \frac{b}{a} Y$: ainsi le rapport de ces ordonnées $\frac{y}{Y}$ est constant et $= \frac{b}{a}$; y est donc toujours $< Y$, c.-à-d. que le cercle décrit sur le grand axe renferme l'ellipse. On verra de même que le cercle décrit sur le petit axe BD est renfermé dans l'ellipse. 203.

396. De $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$, on tire une construction simple de l'ellipse. Après avoir décrit les axes AO et BD, et deux cercles concentriques avec les rayons a et b, où 203.

203. mènera un rayon quelconque CN, et par les points Q et N où il coupe les circonférences, on tracera des parallèles QM, NP aux axes; elles donneront par leur rencontre un point M de la courbe; en effet, on a $\frac{PM}{PN} = \frac{CQ}{CN}$ ou $\frac{PM}{Y} = \frac{b}{a}$; d'où $PM = y$.

397. Cherchons maintenant si l'ellipse a un *foyer*, c.-à-d. un point (α, β) dont *la distance* δ *à tous les points de la courbe, soit rationnelle par rapport à leurs abscisses* x. On verra, de même que pour la parabole, que y ne doit pas entrer à la première puissance dans. . . $\delta^2 = (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2$, puisque $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$: ainsi $\beta = 0$, et mettant $b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$ pour y^2, on trouve

$$\delta^2 = b^2 + \alpha^2 - 2\,\alpha x + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x^2.$$

Or cette valeur n'est un carré (138) qu'autant que $\alpha^2 = (\alpha^2 + b^2)\left\{\frac{a^2-b^2}{a^2}\right\}$, d'où $\alpha^2 = a^2 - b^2$, et par conséquent $\delta = \pm\left(a - \frac{\alpha x}{a}\right)$; mais α et x sont $< a$, d'où $\alpha x < a^2$; ainsi pour que δ soit positif, on préfèrera le signe $+$, et on aura

$$\beta = 0,\quad \alpha = \pm\sqrt{(a^2-b^2)},\quad \delta = a - \frac{\alpha x}{a}.$$

206. On voit par la double valeur de l'abscisse α que *dans l'ellipse, il y a deux foyers, situés sur le grand axe*, à égale distance du centre C. On trouve leur position en décrivant de l'extrémité B du petit axe avec le rayon a, un cercle qui coupe AO, aux foyers F et F'; car le triangle $F'BC$ donne $F'C = \sqrt{(a^2-b^2)} = \alpha$.

Lorsqu'on prend le foyer F, on a 206.

$$\delta = a - \frac{\alpha x}{a} = FM,$$

mais pour le foyer F', α est négatif, et on a

$$F'M = \delta' = a + \frac{\alpha x}{a}.$$

Ce seroit le contraire, si le point M avoit une abscisse x négative. On tire de là $\delta + \delta' = 2a$: comme on donne aux lignes FM, $F'M$ le nom de *Rayons vecteurs*, on voit que *dans l'Ellipse, la somme des rayons vecteurs est égale au grand axe.*

On tire de là une méthode très-expéditive pour décrire l'ellipse : après avoir tracé les axes et les foyers F, F' ; de F comme centre, avec un rayon OK égal à une partie quelconque du grand axe, on décrira un arc vers M ; puis de l'autre foyer F', avec le reste AK de l'axe, on décrira un autre arc qui coupera le premier en M, et donnera un point de la courbe, puisque $FM + F'M = AO$. En décrivant des arcs de part et d'autre des axes, on trouvera quatre points à la fois.

Lorsque la courbe a de grandes dimensions, on fixe aux foyers F et F' les deux extrémités d'une corde dont la longueur soit $2a$, puis on fait glisser sur cette corde un stilet, en la maintenant toujours tendue dans une situation semblable à $F'MF$. Le stilet décrit la courbe.

398. On peut donc en quelque sorte regarder l'ellipse comme une courbe à deux centres ; c'est ce qui a fait nommer *Excentricité* la distance FC : elle est nulle pour le cercle ; car $a = b$ donne $\alpha = 0$. Plus l'ellipse s'alonge, plus les foyers s'écartent : dans le cercle ils se confondent avec le centre.

Pour trouver la valeur du *Paramètre*, qui est la double

206. ordonnée passant par le foyer, on fait $x^2 = a^2 - b^2$, dans l'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, et on trouve $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Le paramètre est donc $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$; c'est *une troisième proportionnelle au grand et au petit axe.*

399. Pour rapporter l'ellipse à des coordonnées polaires, on place ordinairement le pôle au foyer. On pourroit en trouver l'équation par la transformation (385); mais il est plus simple de reprendre la valeur de δ et de mettre l'origine au foyer F, en faisant $x = x' + \alpha$; on trouve $r = a - \frac{\alpha(x' + \alpha)}{a}$; et comme $x' = r\cos\theta$, en substituant il vient

$$r = \frac{a^2 - \alpha^2}{a + \alpha\cos\theta} \text{ ou } r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

en faisant $\alpha = ae$ c.-à d. e désignant le rapport de l'excentricité au demi grand axe, et θ l'angle MFO. Cette formule est très-usitée en astronomie.

4. *De l'Hyperbole.*

204. 400. L'équation de l'hyperbole, lorsque l'origine est au sommet A, est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$: or $(2a + x)x$ est le produit des distances AP et OP du pied de l'ordonnée aux sommets : donc ici comme dans l'ellipse, *les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits de ces distances*; lorsque l'origine est au centre, l'équation est $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Si $a = b$ l'hyperbole est dite *Equilatère*; son équation est $y^2 - x^2 = -a^2$.

En changeant x en y et y en x, l'équation devient $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$: la forme est la même au signe près du

second membre ; les abscisses x sont alors comptées sur celui DB des deux axes qui ne coupe pas la courbe. 204.

Comme dans l'hyperbole b peut être $> a$, on nomme *premier axe* celui qui rencontre la courbe ; il est pris sur la projection de l'axe du cône sur le plan coupant. L'autre est le *second axe* ; de sorte que $a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2$ est l'équation de l'hyperbole rapportée au second axe a. *Voy.* fig 222, où C est le centre.

Si on décrit une ellipse $ABOD$ sur les mêmes axes, elle sera alongée dans le sens des x ou des y, et comprise entre les sommets : ce sera un cercle si l'hyperbole est équilatère. Ces courbes ont des propriétés communes ou analogues, qu'on peut voir *Géométrie de position*, par Carnot, p. 143. 204.

401. Sans nous arrêter à faire de nouveau les calculs propres à donner les foyers de l'hyperbole, changeons b en $b\sqrt{-1}$, nous aurons

$$\beta = 0,\ \alpha = \pm\sqrt{(a^2 + b^2)},\ \delta = \pm\left(a - \frac{\alpha x}{a}\right)$$

Ainsi l'*hyperbole a aussi deux foyers* F *et* F' *sur le premier axe* : prenant $AD = b$, CD sera $\sqrt{(a^2 + b^2)} = \alpha$; ainsi on portera CD de C en F et F' pour avoir les foyers. Puisqu'ici α et x sont $> a$, on a $\alpha x > a^2$; on doit donc préférer le signe — pour que δ soit positif, et on a pour le foyer F, $FM = \delta = \frac{\alpha x}{a} - a$. Mais pour l'autre foyer F' α est négatif; il faut au contraire prendre pour δ le signe positif, en sorte que $F'M = \delta' = \frac{\alpha x}{a} + a$. On en conclut $\delta' - \delta = 2a$, *ou la différence des rayons vecteurs égale au premier axe.* 207.

On construira l'hyperbole d'une manière analogue à

207. l'ellipse : après avoir tracé les axes et les foyers, on décrira vers M, un arc du centre F avec un rayon quelconque AG ; puis du centre F' avec le rayon OG, on décrira un deuxième arc : le point d'intersection M sera sur la courbe, puisque la différence des rayons vecteurs, ou $F'M - FM = AO$. Les mêmes ouvertures de compas donnent aussi quatre points de la courbe.

Le paramètre conserve la même valeur $p = \frac{2b^2}{a}$.

402. En raisonnant ici comme pour l'ellipse, on obtient pour l'équation polaire

$$r = \frac{\alpha^2 - a^2}{a + \alpha \cos \theta} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta}$$

Le pôle étant en F, et en faisant l'angle $AFM = \theta$ et $\alpha = ae$.

5. *Méthode des Tangentes.*

208. 403. Si par deux points M et Q d'une courbe quelconque BMQ, on mène une sécante SMQ, et qu'on fasse varier la position de Q sur la courbe, la sécante prendra diverses inclinaisons déterminées. Si on rapproche Q de M jusqu'à faire coïncider ces deux points, la sécante SQ deviendra TM : cette droite se nomme *Tangente* ; c'est *une sécante dont on a fait coïncider les points d'intersection.*

Remarquons que l'équation de toute droite qui passe en un point $M(x', y')$ est

$$y - y' = A(x - x') \ldots \quad (1)$$

en sorte que pour déterminer la tangente TM, il suffit d'assigner à A la valeur qui convient à l'inclinaison de cette droite, $A = \text{tang. } T$; il faut pour cela exprimer en analyse les conditions qui lui servent de définition.

Désignons par $x' + h$ et $y' + k$ les coordonnées du

deuxième point Q d'intersection de la sécante SM, ou $MR = h$, $QR = k$, la tangente de l'angle QMR est...... 208.
$\frac{k}{h}$ = tang S. Or tang T est visiblement la *limite* de *tang* S, lorsqu'on fait varier le point Q pour l'approcher de M; en sorte que si on pose tang $T =$ tang $S + \alpha$, ou $A = \frac{k}{h} + \alpha$, α pourra décroître indéfiniment. Si donc on parvient à mettre la valeur de $\frac{k}{h}$ sous la forme $p + \beta$, p étant une quantité invariable, quand on change le point Q; et β étant aussi petit qu'on veut, l'équation $A = p + \beta + \alpha$ se partagera (167) en deux autres; l'une $A = p$ qui déterminera A; l'autre $\beta + \alpha = 0$, qui devra subsister entre les variables K et h, quelque part que soit le point Q sur la courbe.

Concluons de là qu'il faudra substituer $y' + k$ et $x' + h$ pour x' et y' dans l'équation $M = 0$ de la courbe, et en tirer le rapport $\frac{k}{h}$; puis y faire k et h nuls; on obtiendra ainsi la limite de ce rapport ou A. Enfin substituant dans l'équation (1), on aura celle de la tangente.

La droite indéfinie MN perpendiculaire à la tangente au point M de contact, est la *Normale*; l'équation est facile à déduire de celle de la tangente, puisque ces droites passent par le point $M(x', y')$, et de plus sont perpendiculaires. L'équation de la normale est (371)

$$y - y' = -\frac{1}{A}(x - x') \quad \ldots \quad (2)$$

Les longueurs TP PN comprises entre les pieds T, P et N de la tangente, de l'ordonnée et de la normale sont la *sous-tangente* et la *sous-normale*. En faisant $y = 0$

208. dans les équations de la tangente et de la normale, on obtient les abscisses AT et AN des points T et N; on en conclut facilement.

$$\textit{sous-tang. } TP \text{ ou } x' - x = \frac{y'}{A} \ldots (3)$$

$$\textit{sous-norm. } PN \text{ ou } x - x' = Ay' \ldots (4)$$

Il pourroit arriver que la tangente et la normale n'eussent pas la même disposition que dans notre figure, et que la sous-tangente fût $x - x'$; et la sous-normale $x' - x$; mais alors le signe négatif qui affecteroit ces valeurs, indiqueroit cette circonstance (332).

Les longueurs MT et MN sont appelées aussi l'une *tangente*, l'autre *normale*.

209. 404. Appliquons ces principes, et commençons par l'*ellipse*; on a $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, et mettant $y' + k$ et $x' + h$ pour y' et x', il vient

$$a^2(y' + k)^2 + b^2(x' + h)^2 = a^2b^2$$

développant et retranchant la proposée, on a

$$ka^2(2y' + k) + hb^2(2x' + h) = 0$$

d'où $\dfrac{k}{h} = -\dfrac{b^2(2x' + h)}{a^2(2y' + k)}$ et $A = -\dfrac{b^2x'}{a^2y'}$

puis substituant dans les équations 1, 2, 3 et 4, et réduisant, on trouve

1°. Equation de la *tangente*, $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$

2°. Equation de la *normale*, $y - y' = \dfrac{a^2y'}{b^2x'}(x - x')$

3°. Pour la *sous-tangente*, $TP = \dfrac{a^2 - x'^2}{x'}$

4°. Pour la *sous-normale*, $PN = \dfrac{b^2x'}{a^2}$.

405. Nous tirerons de là plusieurs conséquences : 209.

1°. La valeur de A ne change pas lorsque x' et y' prennent des signes contraires ; ainsi les tangentes en M et M' sont parallèles.

2°. En faisant $y=0$ dans l'équation de la tangente, on a $CT=x=\frac{a^2}{x'}$; $a>x'$ donne $CT>a$. On voit que CT est indépendant de b ; ainsi toutes les ellipses décrites sur le même axe AO auront un même pied T pour la tangente TM, TQ....., l'abscisse $x'=CP$ demeurant la même. Ainsi décrivons un cercle AQO sur le diamètre AO, prolongeons l'ordonnée PM en Q, menons la tangente TQ et nous aurons le point T. C'est un moyen facile de tracer la tangente à l'ellipse.

3°. En faisant $y=0$ dans l'équation de la normale, on 210.
trouve $x=CN=\frac{a^2-b^2}{a^2}x'$; ainsi N et M sont situés du même côté de Cy.

406. Si par le point O $(a, 0)$ on mène une droite 209.
quelconque ON, son équation sera $y=\alpha(x-a)$; de même celle de la droite NA est $y=\alpha'(x+a)$. Le point de rencontre de ces lignes a pour coordonnées $x=a.\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha-\alpha'}$, $y=\frac{2a\alpha\alpha'}{\alpha-\alpha'}$: ce point est déterminé lorsqu'on fixe les directions des lignes AN et NO, c.-à-d. α et α' ; mais comme elles sont arbitraires, on peut en disposer de manière que ces lignes se coupent sur l'ellipse ; on dit alors qu'elles sont *cordes supplémentaires*. Dans ce cas nos valeurs x et y doivent satisfaire à l'équation $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, ce qui donne $a^2\alpha^2\alpha'^2+b^2\alpha\alpha'=0$, ou $\alpha\alpha'(a^2\alpha\alpha'+b^2)=0$. On exprime donc que les cordes se coupent sur l'ellipse, soit

209. en posant α ou $\alpha'=0$; ce qui n'apprend rien de nouveau; soit en faisant $\alpha\alpha'=-\frac{b^2}{a^2}$.

Le signe — provient de ce que α et α' ont des signes contraires, puisque si l'un des angles formés avec l'axe AO est aigu (vers la droite), l'autre est obtus. Si $a=b$, on a $\alpha\alpha'+1=0$, et les cordes sont à angle droit, c'est la propriété du cercle. Traçons un cercle sur le grand axe ; l'angle ANO sera obtus, comme étant intérieur à son correspondant dans le cercle. Les cordes supplémentaires du petit axe forment entre elles un angle aigu, puisque cet angle est extérieur à celui qui lui correspond dans le cercle décrit sur CB.

407. Toute ligne CM menée par le centre C a pour équation $y=A'x$; si de plus on veut qu'elle passe par le point $M(x',y')$ il faut que $A'=\frac{y'}{x'}$: pour la tangente en M, $A=-\frac{b^2x'}{a^2y'}$, d'où $AA'=-\frac{b^2}{a^2}=\alpha\alpha'$. Si donc on mène une corde AN parallèle à la ligne CM (qui va du centre au point de tangence), $A'=\alpha'$ donne $A=\alpha$, et la tangente TM est parallèle à la corde supplémentaire NO, ce qui fournit encore un moyen très-simple de mener une tangente à l'ellipse.

408. Faisons décrire la courbe au point de contact $M(x',y')$, et suivons la tangente dans toutes les positions qu'elle affecte. En O, $x'=a$, $y'=0$, l'équation de TM devient $x=a$; ainsi la tangente est parallèle aux y. A mesure que le point de contact s'élève sur la courbe, x' décroît et y' croît ; et comme . . . . $A=-\frac{b^2x'}{a^2y'}$ et $CT=\frac{a^2}{x'}$, le point T s'éloigne sans cesse, et l'angle MTC décroît, jusqu'à ce qu'en B la

tangente devienne parallèle au grand axe. La symétrie de 209.
la courbe dispense de poursuivre plus loin cet examen : ainsi *il n'y a point d'inclinaison donnée qui ne puisse convenir à l'une des tangentes de l'ellipse.*

Il sera facile de trouver en quel point d'une courbe une droite doit la toucher, pour que son inclinaison soit donnée. En effet, ce problème consiste à trouver x' et y' lorsque A est donné, et on a pour cela les équations

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2, \quad Aa^2y' + b^2x' = 0.$$

On peut également résoudre un grand nombre de problèmes relatifs à la tangente, et qu'on traiteroit par une analyse semblable.

409. Cherchons l'inclinaison des rayons vecteurs sur la 210.
tangente. Soient $CF = \alpha$, les angles $FMT = V$, $F'MT = V'$. Toute droite qui passe en M (x', y') a pour équation $y - y' = A'(x - x')$: s'il s'agit du rayon vecteur FM, comme le point F $(\alpha, 0)$ est sur cette ligne, on a $A' = \frac{-y'}{\alpha - x'}$. Mais pour l'inclinaison de la tangente, on a $A = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$; ainsi tang $V = \frac{A - A'}{1 + AA'}$, toute réduction faite, devient tang $V = \frac{b^2}{\alpha y'}$. En changeant α en $-\alpha$, on a pour l'autre rayon vecteur $F'M$, tang $V' = -\frac{b^2}{\alpha y'}$ ces valeurs étant égales avec des signes contraires, on en conclut que les angles V et V' sont supplémens l'un de l'autre (351). Ainsi l'angle FMT est aigu et supplément de l'angle obtus $F'MT$; ou plutôt les angles aigus $F'MI$ et FMT sont égaux.

Ainsi *les rayons vecteurs de l'ellipse menés au point de contact sont également inclinés sur la tangente et sur*

210. *la normale*. Donc tous les rayons lumineux ou sonores $F'M$ qui partent du foyer F' doivent à leur rencontre en M avec l'ellipse se réfléchir à l'autre foyer F. En prolongeant $F'M$, la tangente TM divise en deux parties égales l'angle FMG, et la normale l'angle $F'MF$.

410. On peut se servir de cette propriété pour mener une tangente ou une normale en un point donné M de l'ellipse; car prenant sur le prolongement de $F'M$, $MG = FM$, TM sera perpendiculaire sur le milieu de FG.

Si on veut mener la tangente TM par un point extérieur donné I, le point M n'étant pas connu, au lieu d'employer un calcul qui seroit diffus, il est préférable de supposer le problême résolu; alors I étant à égale distance de F et de G, le cercle FG qui passe en F et dont I est le centre, passe aussi en G; mais. . . . . $F'G = F'M + MF = AO$; donc le point G est aussi sur le cercle décrit du centre F' avec le rayon AO.

Une fois ces deux cercles tracés, le point G est connu, on mène $F'G$ et on a le point M de contact. Il est d'ailleurs certain que les deux cercles doivent se couper, puisque sans cela, le point G n'existant pas, le problême seroit absurde; ce qui ne peut être tant que le point I est extérieur à l'ellipse : on a même deux points G, et partant deux tangentes.

205. 411. Appliquons à la *parabole* les principes du n°. (403). On a pour le point M (x', y') de cette courbe $y'^2 = 2px'$: changeons y' en $y' + k$ et x' en $x' + h$, il viendra

$$y'^2 + 2y'k + k^2 = 2px' + 2ph,$$

qui se réduit à $k(2y' + k) = 2ph$, d'où

$$\frac{k}{h} = \frac{2p}{2y' + k} \text{ et } A = \frac{p}{y'}$$

les équations 1, 2, 3 et 4 deviennent donc

Équation de la *tangente*. $yy' = p(x + x')$ 205.

Équation de la *normale*. $(y - y')p + (x - x)y' = 0$

Pour la *sous-tangente*.. $TP = \frac{y'^2}{p} = 2x$

Pour la *sous-normale*. . $PN = p$

donc 1°. le pied T de la tangente est à gauche de l'origine, en sorte que $AT = AP$, ou *la sous-tangente est double de l'abscisse.*

2°. *La sous-normale est constante et égale au demi-paramètre.*

3°. Pour la normale $MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)}$ on trouve $MN = \sqrt{(y^2 + p^2)} = \sqrt{(2x + p)\,p}$.

412. Cherchons l'angle $TMF = V$ que forment le rayon vecteur et la tangente; ce rayon passe par les points $M(x', y')$ et $F(\frac{1}{2}p, 0)$: son équation est donc 205.

$$y - y' = A'(x - x'),\ \text{d'où}\ A' = \frac{-y'}{\frac{1}{2}p - x'}$$

pour la tangente TM, on a $A = \frac{p}{y'}$; ainsi . . . .
tang $V = \frac{A' - A}{1 + AA'}$; devient en substituant

$$\text{tang}\ V = \frac{y'^2 + \frac{1}{2}p^2 - px'}{\frac{1}{2}py' + y'x'} = \frac{p}{y'} = A$$

à cause de $y'^2 = 2px'$, et en supprimant le facteur commun $\frac{1}{2}p + x'$. Ainsi le *triangle* TMF *est isoscèle*, puisque l'angle $T = TMF$. Donc tous les rayons lumineux et sonores SM parallèles à l'axe, doivent à leur rencontre en M avec la parabole se réfléchir au foyer F. De plus *la tangente* TM *divise l'angle* QMF *en deux parties égales*, et est perpendiculaire sur le milieu de QF. Enfin $FM = FT$, ce qui fournit encore un moyen de mener la tangente TM.

205. 413. Faisons varier le point de tangence M (x', y') et plaçons-le successivement en tous les points de la courbe ; puis suivons la tangente dans toutes les positions qu'elle affecte. Comme elles sont déterminées par l'équation $yy' = p(x + x')$, ou plutôt par l'angle formé avec l'axe des x, dont la tangente est $A = \frac{p}{y'}$, et par l'ordonnée à l'origine, $Ai = \frac{px'}{y'} = \frac{1}{2} y'$: il est facile de voir qu'au sommet A, où $x' = 0$, $y' = 0$, l'axe des y est tangent : qu'ensuite à mesure que le point de contact s'élève sur la courbe AM, x' et y' croissent, ainsi que Ai ; l'angle T diminue.

La tangente prenant toutes les directions possibles, *il n'y a point d'inclinaison donnée qui ne puisse convenir à l'une des tangentes de la parabole.* Si donc on connoît A, on tirera de $A = \frac{p}{y'}$ la valeur de y' et le point de tangence. Soit, par exemple, $A = 1$, on a $y' = p$, d'où $x' = \frac{1}{2} p$; le foyer F répond donc au point G dans toute parabole, pour lequel la tangente fait un angle de 50° avec l'axe.

414. Il est visible par là que l'équation $yy' = p(x + x')$ peut servir à mener une tangente, sans connoître le point de contact (x', y'), pourvu qu'on donne certaines conditions propres à le déterminer. Si on veut, par exemple, mener
205. une tangente par un point I donné et extérieur (α, β), l'équation de cette ligne devant être satisfaite par $x = \alpha$ et $y = \beta$, on a $\beta y' = p(\alpha + x')$, $y'^2 = 2px'$; l'élimination fera connoître le point de contact (x', y'). Mais voici un procédé plus facile pour construire cette tangente.

Supposons le problème résolu : soit I le point donné et IM la tangente ; puisque IM est perpendiculaire sur

le milieu de QF, I est à la même distance de F et de Q. 205.
Si donc du centre I on décrit un cercle passant en F, il passera par le point Q de la directrice ; on tire ensuite QM parallèle aux x, et on a le point de contact ; ou bien on mène IM perpendiculaire sur QF.

On ne doit pas craindre que le cercle ne coupe pas la directrice, puisque toutes les fois que la tangente est possible (ce qui arrive quand le point I est extérieur), le point Q doit exister. On a même un second point Q', c.-à-d. deux tangentes.

415. Venons-en maintenant à l'*hyperbole* ; on pourroit ici refaire tous les calculs qu'on vient d'appliquer à l'ellipse; mais il suffit de changer dans ceux-ci b en $b\sqrt{-1}$, (390) On trouve alors les résultats suivans :

1°. Pour l'inclinaison et l'équation de la tangente

$$A=\frac{b^2x'}{a^2y'},\quad a^2yy'-b^2xx'=-a^2b^2 \qquad 207.$$

La tangente TM fait avec l'axe des x un angle aigu : elle est parallèle à celle qu'on mèneroit en M'. On aura de même l'équation de la normale.

2°. $CT=\frac{a^2}{x'}$, les points M et T tombent du même côté du centre C, comme x' est $>a$, T est compris entre C et le sommet A, et la sous-tangente $=\frac{x'^2-a^2}{x'}$. La sous-normale $=\frac{b^2x'}{a^2}$.

3°. Pour les deux cordes supplémentaires ON et AN, 211.
on a $\alpha\alpha'=\frac{b^2}{a^2}$; les deux angles formés avec l'axe des x sont aigus : l'angle ONA est droit dans l'hyperbole équilatère, car alors $\alpha\alpha'=1$. Pour la ligne CM et la tangente

211. en M, on a $AA' = \frac{b^2}{a^2}$; on conclut donc que le procédé (407) pour mener une tangente à l'ellipse est applicable ici. On mène au point M de contact la ligne CM, puis la corde ON parallèle à CM, et sa corde supplémentaire NA; celle-ci est parallèle à la tangente TM.

207. 4°. Les angles formés par les rayons vecteurs et la tangente conservent la même valeur $\frac{b^2}{ay'}$: *leurs inclinaisons sur la tangente sont donc les mêmes ainsi que sur la normale; TM* divise $F'MF$ en deux parties égales, on construit donc la tangente par le même procédé que pour l'ellipse (409).

Si le point donné est sur la courbe en M, on prend $MG = MF$, et on abaisse MT perpendiculaire sur le milieu de FG.

Si le point donné est en I hors de la courbe, du centre I on décrira le cercle FG; puis du centre F' avec un rayon $F'G = F'M - FM = AO$, on tracera un second cercle *qui coupera* le premier en deux points: G étant connu, $F'G$ donne le point M de contact.

212. 416. Faisons parcourir au point de contact M les divers points de la courbe. En A ($x' = a$, $y' = o$) l'équation de la tangente devient $x = a$, ainsi la tangente au sommet est parallèle aux y. A mesure que le point M s'élève sur la courbe, x' et y' croissent; et puisque $CT = \frac{a^2}{x'}$, le pied T de la tangente s'approche du centre C, sans jamais y atteindre (que lorsque $x' = \infty$).

Pour connoître les positions successives de la tangente, il faut en déterminer les diverses inclinaisons; mais on ne peut les déduire de la valeur $A = \frac{b^2x'}{a^2y'}$, parce que x'

et y' croissent ensemble. Pour lever cette difficulté, mettons pour y' sa valeur $\pm \frac{b}{a} \sqrt{(x'^2-a^2)}$ et divisons haut et bas par bx', il viendra 212.

$$A = \frac{\pm b}{a\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x'^2}\right)}}$$

or plus x' croît et plus A décroît, de sorte que l'angle T diminue sans cesse; mais cela n'a pas lieu indéfiniment, car le radical approche de plus en plus de *un* et ne peut dépasser ce terme qu'il n'atteint même qu'à $x' = \infty$: donc alors $A = \pm \frac{b}{a}$ et $CT = 0$. Du reste, il est inutile de continuer le mouvement du point M sur les autres parties de la courbe, à cause de la symétrie.

Si on porte au sommet A les ordonnées $AD = AD' = b$, et qu'on trace CD et CD', ces droites auront pour équations $y = \pm \frac{b}{a} x$; elles seront donc celles dont il vient d'être question. Ainsi CD CD' sont *les limites de toutes les tangentes, et ne rencontrent la courbe qu'à l'infini.*

417. Comparant l'ordonnée $PM = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2-a^2)}$ de 212.
la courbe, à celle $PQ = \pm \frac{b}{a} x$ des droites CD et CD', on voit que toute la courbe est comprise dans l'espace DCD' indéfini, de sorte que jamais l'intervalle QM n'est nul, quoiqu'il diminue sans cesse et puisse être rendu aussi petit qu'on veut. On appelle *Asymptote une droite qui s'approche ainsi d'une branche de courbe sans l'atteindre jamais, quoiqu'elle en approche indéfiniment. V.* n°. 685.

Il résulte de là que, 1°. les droites CD et CD' dont

212. les équations sont $y = \pm \frac{b}{a} x$ sont les asymptotes de l'hyperbole.

2°. Elles sont les limites des tangentes.

3°. Toute tangente à la courbe fait avec le premier axe un angle compris entre *DCA* et un droit. On ne peut donc se proposer de mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une droite donnée, qu'autant que sa parallèle *CI* menée par le centre est hors de l'angle *DCD'*.

4°. Toute droite passant par le centre *C* et tracée dans l'angle asymptotique *QCQ'* rencontre la courbe; et hors de cet angle elle ne la rencontre pas, telle que *CI*.

5°. Lorsque l'hyperbole est équilatère, les asymptotes sont à angle droit, à cause de $b = a$.

213. 418. Rapportons maintenant l'hyperbole à ses asymptotes *CT Cb* pour axes coordonnés : *MP* parallèle à *Cb* donne $CP = x'$, $PM = y'$; soit α l'angle $ACT = Acb$, d'où

$$\text{tang}\ \alpha = \frac{b}{a} = \text{tang}\ ACT$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}},\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

substituons $-\alpha$ et α pour (xx'), (xy') dans les formules générales (*B*, 383) de la transformation des coordonnées; il viendra

$$x = \frac{a\,(y' + x')}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},\ y = \frac{b\,(y' - x')}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},$$

valeurs qu'il faut substituer dans $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, ce qui donne $x'y' = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$. Supprimant les accens et faisant pour abréger

$$\tfrac{1}{4}(a^2 + b^2) = m^2,\ \text{il vient}\ xy = m^2$$

pour l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. Si on eût compté les x' sur Cb et les y' sur CT', on auroit obtenu $xy = -\frac{1}{4}(a^2 + b^2) = -m^2$. 213.

Comme $x = \frac{m^2}{y}$, on voit que la courbe s'approche indéfiniment de l'axe des x sans jamais l'atteindre, ce qu'on savoit déja.

419. L'angle bCP des asymptotes est 2α; et comme $xy \times \sin(2\alpha) = m^2 \sin(2\alpha)$, et que $xy \sin(2\alpha)$ est (365, V, 2°.) l'aire du parallélogramme $CPMQ$, il s'ensuit que *cette aire est constante*, quelque part qu'on prenne le point M. Au sommet A, cette aire devient $CDAB$, qui est un lozange, puisque les triangles CDA CBA ayant en C et A leurs angles égaux, sont isoscèles : on en conclut $m = CD$. m^2 est ce qu'on appelle la *Puissance* de l'hyperbole.

Lorsque l'hyperbole est équilatère, $CBAD$ est un carré dont m^2 est la surface.

420. Cherchons l'équation de la tangente TM en un point $M(x', y')$, en prenant pour axes les asymptotes. Cette équation est $y - y' = A(x - x')$, A étant le rapport des sinus des angles que cette tangente fait avec les axes (367). Mais pour une sécante quelconque, RN passant en M, on trouve en résolvant le triangle MIN, $\frac{\sin NMI}{\sin MNI} = \frac{k}{h}$ en faisant $MI = h$, $IN = k$: ainsi $-A$ est visiblement la limite de $\frac{k}{h}$. Il ne reste donc plus qu'à chercher cette limite (403). 213.

Or mettant $x' - h$ et $y' + k$ pour x' et y' dans l'équation $x'y' = m^2$, on trouve

$$\frac{k}{h} = \frac{y'}{x' - h}, \text{ d'où } A = -\frac{y'}{x'}$$

et

$$yx' + y'x = 2m^2$$

213. pour l'équation de la tangente. $y = 0$ donne pour le pied T de la tangente TM, $x = \frac{2m^2}{y'}$ ou $CT = 2x' = 2CP$. Il en résulte, 1°. qu'en prenant $TP = CP$ et menant TM, on aura la tangente. 2°. $SM = MT$, ainsi le point de contact M est au milieu de ST.

213. 421. L'équation de la sécante MN est $y = kx + l$: le point R où elle coupe l'asymptote se trouve en faisant $y = 0$, d'où $CR = -\frac{l}{k}$. Les points M et N d'intersection avec la courbe s'obtiennent en éliminant x et y entre $xy = m^2$ et $y = kx + l$; donc $kx^2 + lx = m^2$. Or $-\frac{l}{k}$ est la somme des racines (137, 2°.) ou $CP + aN$; donc $CP + aN = CR = CP + PR$: ainsi $aN = PR$, et les triangles Nab PMR étant égaux, on a $bN = MR$.

Puisque cette propriété subsiste pour tous les points de la courbe, on en tire ce procédé très-simple pour la décrire. Après avoir trouvé l'un des points de la courbe, tel que M (le sommet, si l'on veut), par ce point on mènera une droite quelconque Rb et on prendra $RM = bN$; N sera un second point de la courbe. En répétant cette construction sur le point M, ou sur N, on obtiendra de même de nouveaux points.

422. Si on applique le raisonnement du n°. 403 à l'équation $y'^2 = mx' + nx'^2$, on trouve

$$\frac{k}{h} = \frac{m + 2nx' + nh}{2y' + k}, \text{ d'où } A = \frac{\frac{1}{2}m + nx'}{y'}$$

pour la tangente de l'angle formé avec l'axe des x, par la ligne qui touche la courbe au point (x', y'). Donc les équations de la tangente et de la normale sont

$$2yy' = (m + 2nx')x + mx',$$ 213.

$$(\tfrac{1}{2}m + nx')(y - y') + y'(x - x') = 0,$$

d'où $$\text{sous-tang} = \frac{y'^2}{\tfrac{1}{2}m + nx'}$$

$$\text{sous-norm} = \tfrac{1}{2}m + nx'$$

l'équation $y^2 = mx + nx^2$ convient à nos trois courbes qui ne se distinguent entre elles que par les valeurs de m et n (389). On cumule donc ici les divers résultats obtenus précédemment.

423. Lorsqu'on élimine x et y entre l'équation $y = ax + b$ et celle d'une courbe du second degré, les coordonnées x et y sont celles des points de rencontre de la droite et de la courbe : elles sont données par des équations du second degré. Suivant que les racines sont réelles ou imaginaires, la droite et la courbe ont deux points communs ou ne se rencontrent pas. Mais *si les racines sont égales, la droite est tangente à la courbe*, puisqu'alors les points d'intersection coïncident, comme ayant mêmes coordonnées.

Si, par exemple, on élimine x et y entre

$$8y + 3x = 10, \quad \text{et} \quad 4y^2 + x^2 = 4$$

pour trouver les points de rencontre de la droite et de la courbe représentées par ces équations, on trouve $25x^2 - 60x + 36 = 0$, ou $(5x - 6)^2 = 0$. Ainsi la droite TM touche au point M ($\frac{6}{5}$, $\frac{4}{5}$) : l'ellipse ABO, dont les demi-axes sont $AC = a = 2$, $BC = b = 1$. 209.

Lorsqu'en faisant $y = 0$ dans une équation, on trouve $(x - a)^2 = 0$, on doit en conclure que la courbe touche l'axe des x au point $(a, 0)$. *V.* fig. 226 et 230, n°s. 448 et 454.

6. *Du Centre et des Diamètres.*

214 et 215. 424. Lorsqu'un point C jouit de la propriété *de couper en deux parties égales toutes les cordes*, telles que MM', menées par ce point, on le nomme *Centre* de la courbe. Mettons l'origine en C; menons PM, $P'M'$ parallèles à l'axe Cy; les triangles CPM, $CP'M'$ sont égaux à cause de $CM = CM'$; d'où $CP = CP'$, $PM = P'M'$. Donc, lorsque l'origine est au centre de la courbe, les ordonnées et les abscisses sont deux à deux égales et de signes contraires. La réciproque a visiblement lieu : l'angle yAx des coordonnées est quelconque.

Donc pour qu'une courbe ait le centre à l'origine, il est nécessaire et il suffit que son équation ne soit point altérée lorsqu'on y change x *en* — x *et* y *en* — y.

425. Appliquons ce précepte aux courbes du second degré, dont l'équation générale est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \ldots (1)$$

Il est manifeste qu'*afin que la courbe ait l'origine pour centre, il faut que son équation ne contienne pas les termes* Dy *et* Ex : elle sera de la forme $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F = 0$. C'est pour cela que, par anticipation, nous avons donné le nom de centre au milieu de l'axe de l'ellipse et de l'hyperbole; et il devient prouvé que toute corde qui passe par ce point y est coupée en deux parties égales.

Mais une courbe pourroit avoir un centre qui ne soit pas situé à l'origine; alors il faudroit qu'on pût l'y transporter : on changeroit pour cela x en $x' + a$, y en $y' + b$, et on détermineroit les coordonnées arbitraires a et b de la nouvelle origine, de manière à chasser les termes qui s'opposent à notre loi. Faisons ce calcul pour l'exemple (1);

on égalera à zéro les termes où x' et y' sont au premier degré, et il viendra 214 et 215.

$$Bb + 2Ca + E = 0, \quad Ba + 2Ab + D = 0 \ldots (2)$$

d'où $a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}$, $b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} \ldots (3)$

et la transformée est $Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Q = 0$, Q désignant le terme tout constant. La courbe du second degré a donc un centre toutes les fois que ce calcul est possible, et *elle n'en a qu'un seul:* mais elle n'en a point dans le cas contraire, qui a lieu lorsque $B^2 - 4AC = 0$; les équations (2) sont alors contradictoires (115, 2°). Cependant si l'un des numérateurs de a ou b étoit en même tems $= 0$, l'autre le seroit aussi; il y auroit une infinité de centres, et les deux équations (2) rentreroient l'une dans l'autre (115, 3°.).

En général a et b représentant des coordonnées variables, les équations (2) appartiennent à deux droites, dont l'intersection donne le centre; elles sont parallèles lorsqu'il n'y a point de centre, et elles coïncident lorsqu'il y en a une infinité; les centres sont tous les points de cette droite. Ces cas particuliers s'éclairciront bientôt (458).

Donc *la parabole n'a point de centre*, puisque $B^2 - 4AC$ devient $0 - 4 \times 0 = 0$, pour l'équation $y^2 = 2px$.

426. On dit qu'une ligne est *Diamètre* d'une courbe *lorsqu'elle coupe en deux parties égales les cordes parallèles*, menées dans cette direction déterminée. 214 et 215.

Lorsque deux droites sont réciproquement des diamètres l'une par rapport à l'autre, on les nomme *Diamètres Conjugués.* C'est ce qui a lieu pour les axes de l'ellipse et de l'hyperbole, etc.

214 et 427. Pour que l'axe des x soit diamètre, les cordes
215. étant parallèles à l'axe des y, il faut que chaque abscisse donne deux valeurs égales et de signes contraires pour y : ainsi en résolvant par rapport à y les équations du second degré qui jouissent de cette propriété, il faut qu'on ait $y = \pm \sqrt{K}$; K contenant x. En faisant le calcul sur l'équation (1), il est visible que cette condition n'a lieu qu'autant qu'elle est privée des termes Bxy et Dy.

On verra aisément que, pour l'ellipse et l'hyperbole, les diamètres passent tous par le centre.

De même, pour que l'axe des y soit diamètre par rapport à celui des x. Il faut que l'équation de la courbe ne contienne ni Bxy, ni Ex. Donc, pour que les deux axes des x et y soient diamètres conjugués, il faut que l'équation soit privée à la fois des termes Bxy, Dy et Ex, c.-à-d., qu'elle ait la forme

$$Ay^2 + Bx^2 = Q \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Ainsi, l'origine est au centre; *l'ellipse et l'hyperbole peuvent avoir des diamètres conjugués, mais la parabole n'en a point.* Tout cela est indépendant de l'angle des coordonnées. Donc

214 et 1°. Soit BB' un diamètre de l'ellipse ou de l'hyperbole,
215. on a vu (405 et 415, 1°) que les tangentes IG et HK en B et B' sont parallèles : de plus elles le sont aussi au diamètre conjugué Cy, puisque, par la nature du diamètre BB', la double ordonnée est nulle en ces points. Ainsi, pour que la courbe soit rapportée à ses diamètres conjugués, *l'axe* Cy *des ordonnées, doit être parallèle à la tangente menée au point* B *ou* B', *où l'axe* Cx *des abscisses rencontre la courbe.*

2°. Toute ligne CB menée par le centre C, est un

diamètre dont le conjugué est parallèle à la tangente en B; 214 et
cela résulte de ce que l'équation de la courbe rapportée 215.
à ce système d'axes a alors nécessairement la forme (4). Ainsi, *dans l'ellipse et l'hyperbole, il y a une infinité de diamètres conjugués.*

3°. Si AO est le premier axe de l'ellipse ou de l'hyperbole, il y aura toujours deux cordes supplémentaires ON, NA, parallèles aux diamètres conjugués Cy et Cx: et la relation donnée pour l'inclinaison de ces cordes sur l'axe AO, convient aussi à celle de ces diamètres; cette relation est $a^2\alpha\alpha' + b^2 = 0$ pour l'ellipse, et $a^2\alpha\alpha' - b^2 = 0$ pour l'hyperbole,

4°. Si le diamètre conjugué Cy rencontre aussi la 214.
courbe, ce qui a lieu pour l'ellipse, on verra de même que IK et GH tangentes en D et D' sont parallèles au premier diamètre BB'. Le parallélogramme $GIKH$ est
appelé *Circonscrit* à la courbe. Mais Cy ne la rencontre 215.
pas dans le cas de l'hyperbole, puisque cette droite est tracée hors de l'angle des asymptotes (417,4°). Le premier diamètre coupe donc la courbe, mais le second ne la rencontre pas.

428. Soient Cx et Cy les diamètres conjugués d'une 214.
ellipse; on nomme BB' et DD' leurs *Longueurs* : faisons $CB = a'$ et $CD = b'$. Or $y = 0$ donne $x = a'$, $x = 0$ donne $y = b'$; ces conditions étant introduites dans l'équation (4), on a $Ba'^2 = Q$; $Ab'^2 = Q$; d'où

$$B = \frac{Q}{a'^2},\ A = \frac{Q}{b'^2},$$ ce qui change cette équation en

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2 \ldots . (5)$$

qui est celle de l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués.

429. Soient pareillement Cx et Cy les diamètres conjugués 215.

215. de l'hyperbole ; $CB = a'$ donne $Ba'^2 = Q$, car $y = 0$ répond à $x = a'$. De plus Cy ne coupant pas la courbe, si on connoissoit l'équation rapportée aux diamètres Cx, Cy, et qu'on voulût trouver le point où Cy rencontre la courbe, $x = 0$ donneroit une valeur imaginaire : mais (par les mêmes motifs qu'au n°. 388, 3°.), changeons le signe sous le radical, cette valeur deviendra réelle ; représentons-la par b' : alors $x = 0$ devra donner $y^2 = -b'^2$, d'où $-Ab'^2 = Q$, b' ou *la demi-longueur du second diamètre, étant l'ordonnée oblique qui répond au centre, mais rendue réelle*. Les équations $Ba'^2 = Q$, $-Ab'^2 = Q$, donnent $B = \frac{Q}{a'^2}$, $A = -\frac{Q}{b'^2}$, et en substituant dans (4) on obtient pour l'équation de l'hyperbole rapportée à ses diamètres conjugués ;

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b^2 \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

Si on prend $CD = CD' = b'$, les parallèles GH, IK à Cx forment le parallélogramme GIKH *inscrit* dans l'hyperbole.

Les équations (5) et (6) pouvant se déduire l'une de l'autre en mettant $b'\sqrt{-1}$ pour b', il en sera de même des résultats de calculs, qu'on est, par cette remarque, dispensé de faire pour les deux courbes.

430. En changeant x en y, et y en x, l'équation de l'ellipse n'est point altérée, de sorte que toutes les constructions qu'on fera sur l'un des diamètres, seront applicables à l'autre. Cette propriété appartient également aux axes. L'équation de l'hyperbole devient

$$b'^2y^2 - a'^2x^2 = a'^2b'^2,$$

lorsque les x sont comptés sur le second diamètre.

431. Puisque les équations de l'ellipse et de l'hyperbole

rapportées aux axes et aux diamètres, sont de même forme, il est inutile de reproduire ici les calculs déja effectués pour les axes, et on peut en déduire que

1°. Les carrés des ordonnées PM sont proportionnels aux produits des distances PB, PB' de leur pied P aux extrémités B et B' du diamètre (395 et 400). 214 et 215.

2°. Deux ellipses dont l'une a pour axes et l'autre pour diamètres conjugués, $2a'$ et $2b'$, ont même équation ; ainsi, pour chaque abscisse, l'ordonnée est d'égale longueur, mais sous des directions différentes. Donc, pour tracer une ellipse, lorsqu'on connoît les directions et les longueurs des diamètres conjugués CB, CD, on prendra $CK = CK' = CD$ perpendiculaire sur BB', puis, à l'aide de la propriété des foyers ou autrement, on décrira l'ellipse $BKB'K'$ sur les axes BB' et KK' : enfin on inclinera chaque ordonnée PN suivant PM parallèle à CD. Si $a' = b'$, $BKB'K'$ est un cercle. 216.

La même construction s'applique visiblement à l'hyperbole; on verra qu'il en est de même de la parabole.

3°. L'inclinaison d'une tangente en un point quelconque (x', y') et l'équation de cette ligne, sont respectivement pour l'ellipse et l'hyperbole

$$A = -\frac{b'^2x'}{a'^2y'}, \quad a'^2yy' + b'^2xx' = a'^2b'^2,$$

$$A = \frac{b'^2x'}{a'^2y'}, \quad a'^2yy' - b'^2xx' = -a'^2b'^2.$$

Seulement A n'est plus la tangente de l'angle que cette droite fait avec l'axe des x, mais bien le rapport des sinus des angles qu'elle fait avec les deux diamètres conjugués (367).

4°. En ayant égard à la même distinction, on pourra voir que la relation donnée pour les cordes supplémen-

taires (406) s'applique ici, et que par conséquent le procédé qu'on en a déduit pour mener une tangente, a encore lieu.

217. Soit donc menée du centre C au point de contact M la ligne CM et sa parallèle $B'N$, la tangente TM sera parallèle à BN : et comme il suffit de connoître le centre pour avoir tant de diamètres qu'on voudra, on sait mener une tangente, lorsque le point du contact et le centre sont donnés.

214. 5°. Puisque deux diamètres conjugués CD, CB sont toujours parallèles à deux cordes supplémentaires ON, NA d'un diamètre quelconque OA, la recherche des diamètres conjugués qui font entre eux un angle donné, revient au même problème pour ces cordes, ou plutôt à la formation du triangle ONA dans lequel la base OA et l'angle N sont donnés. On décrira donc sur un diamètre quelconque OA, un segment de cercle (208, IV et V) capable de l'angle donné; la circonférence coupera l'ellipse au point N par lequel on mènera ON et NA, puis leurs parallèles DC, CB : il y a deux solutions. Si le segment est un demi-cercle décrit sur le diamètre AO, les parallèles à NO et NA sont les axes.

218. Comme les cordes supplémentaires OB, BA qui joignent les extrémités du grand et du petit axe, forment dans l'ellipse le plus grand angle, les diamètres conjugués ne peuvent l'excéder : si donc l'angle donné n'est pas compris entre cet angle et un droit (ou le supplément de ces angles) le problème sera absurde, et le cercle ne coupera pas la courbe.

Lorsqu'une ellipse est tracée, il est facile d'en retrouver les axes, le centre, etc... On mènera deux cordes parallèles quelconques; la droite qui joindra leurs milieux sera un diamètre ; le milieu de cette droite sera le centre. Si on décrit

un cercle concentrique qui coupe la courbe en 4 points, les droites qui divisent les quatre arcs en parties égales sont les axes. 216.

Toutes ces constructions ont également lieu pour l'hyperbole.

432. Cherchons maintenant les relations qui existent entre les demi-axes a, b, et les demi-diamètres conjugués a', b' : pour cela, reprenons les équations de la courbe rapportée aux axes et aux diamètres conjugués, et ramenons l'une d'elles à l'autre à l'aide d'une transformation de coordonnées. Commençons par l'ellipse. 214.

Supposons donc que l'ellipse soit rapportée aux coordonnées obliques x', y', comptées sur les diamètres conjugués CB, CD, et qu'on veuille prendre d'autres axes rectangulaires AO, $M'M$: on sait que, pour cela, il faut substituer dans l'équation $a'^2y'^2+b'^2x'^2=a'^2b'^2$, pour x' et y' les valeurs (D, 384)

$$x'=\frac{s'x-c'y}{\sin\theta},\quad y'=\frac{cy-sx}{\sin\theta},$$

s et s' désignant les sinus des angles BCA, DCA formés par les axes des x' et y' avec celui des x ; c et c' étant les cosinus de ces angles ; enfin θ étant l'angle DCB des diamètres conjugués, d'où $\sin\theta=s'c-sc'$. Le calcul donne

$$(a'^2c^2+b'^2c'^2)y^2-2xy(a'^2sc+b'^2s'c')+(a'^2s^2+b'^2s'^2)x^2=a'^2b'^2\sin^2\theta,$$

Or, pour exprimer que le nouveau système de coordonnées est celui des axes, il faut que ce résultat soit identique avec $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, ou du moins rendu identique par la multiplication d'un facteur inconnu λ : ce qui donne en égalant terme à terme

$$(1)\ldots\ a'^2c^2+b'^2c'^2=\lambda a^2,\quad a'^2sc+b'^2s'c'=0,\ldots(2)$$
$$(3)\ldots\ a'^2s^2+b'^2s'^2=\lambda b^2,\quad a'^2b'^2\sin^2\theta=\lambda a^2b^2\ldots(4)$$

214. Pour déterminer λ, multiplions la 1re. et la 3e.; il vient $a'^4c^2s^2 + b'^2a'^2(s^2c'^2 + s'^2c^2) + b'^4s'^2c'^2 = \lambda^2a^2b^2$; or le second terme $= b'^2a'^2(sc' - s'c)^2 + 2b'^2a'^2s'c'sc$; de sorte qu'on a $(a'^2sc + b'^2s'c')^2 + b'^2a'^2\sin^2\theta = \lambda^2a^2b^2$. Or le premier terme se détruit par la 2e. équation, le second est λa^2b^2 par la 4e., donc $\lambda a^2b^2 = \lambda^2a^2b^2$, ou $\lambda = 1$.

λ étant déterminé, nos quatre équations ne tiennent plus lieu que de trois, et en effet la 4e. est le produit de la 1re. par la 3e. Remplaçons donc celles-ci par leur somme, nous aurons

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \ldots (5)$$
$$a'^2sc + b'^2s'c' = 0, \ldots (6)$$
$$a'b' \sin\theta = ab. \ldots (7)$$

La 5e. prouve que, *dans l'ellipse, la somme des carrés des diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des axes.*

Puisque $a'b' \sin\theta$ est (365, V, 2°.) la surface du parallélogramme $CDBK$; la 7e. équation montre que *le parallélogramme circonscrit à l'ellipse a pour aire le carré des axes;* ainsi, l'aire $IKHG$ est constante quelle que soit la position des diamètres conjugués (*).

Du reste, ces trois équations contenant six quantités, savoir a, a', b, b' et nos deux angles, *on pourra toujours analytiquement en trouver trois, connoissant les trois autres.*

11. 433. Cherchons les diamètres conjugués égaux de l'ellipse; $a' = b'$ change les équations (5, 6 et 7) en

$$2a'^2 = a^2 + b^2, \quad a'^2 \sin\theta = ab, \quad sc + s'c' = 0.$$

(*) Quant à la sixième équation, elle est destinée à lier entre elles les inclinaisons des deux diamètres conjugués sur l'axe; mais nous savons qu'elles sont déterminées par celles des cordes supplémentaires (6); $a^2sc + b^2s'c' = 0$ revient donc (428, 3°.) à $a^2tt' + b^2 = 0$, t et t' étant les tangentes des angles formés par deux diamètres conjugués avec le grand axe. Il seroit aisé de s'en convaincre en éliminant a' et b' à l'aide des deux autres équations (5 et 7)...

La première donne $a' = \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)}$; on a, par la 2ᵉ, 218.

$$\sin\theta = \frac{2ab}{a^2+b^2},\quad \cos\theta = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\quad \tang\tfrac{1}{2}\theta = \frac{b}{a}:$$

enfin soient α et α' les angles formés par les diamètres conjugués égaux avec le grand axe, $2sc = \sin 2\alpha$, $2s'c' = \sin 2\alpha'$; la troisième équation devient $\sin 2\alpha = -\sin 2\alpha'$; ainsi, ces diamètres forment avec le grand axe le même angle, de part et d'autre, et $\theta = 2\alpha$, d'où $\tang\alpha = \frac{b}{a} = \frac{BC}{OC}$. Les cordes supplémentaires OB, AB menées à l'extrémité du petit axe satisfont seules à cette condition, ainsi il suffira de leur mener les parallèles CM et CN (*). Ces diamètres sont visiblement les asymptotes de l'hyperbole qui a le même centre et les mêmes axes.

Quant à l'abscisse CP du point M, comme le triangle CPM donne $x^2 + y^2 = a'^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, en mettant pour y^2 sa valeur $b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$, on trouve $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, et comme ce résultat est indépendant de b, on voit que *toutes les ellipses ont deux diamètres conjugués égaux, dont les extrémités ont la même abscisse lorsque le grand axe est le même.* 215.

434. Pour l'hyperbole, sans refaire ces calculs. Il suffit de changer b et b', en $b\sqrt{-1}$ et $b'\sqrt{-1}$, et on a

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2,\quad a'b'\sin\theta = ab,$$
$$a'^2sc = b'^2s'c' \quad \text{ou} \quad a^2tt' = b^2,$$

qui servent aux mêmes usages que pour l'ellipse. On voit donc que, *dans l'hyperbole, la différence des carrés des*

(*) C'est aussi ce que montre l'équation $a^2tt' + b^2 = 0$, qui, à cause de $\sin\alpha = -\sin\alpha'$, devient $-a\ \tang\ \alpha + b = 0$.

215. *diamètres conjugués, est égale à la différence des carrés des axes*; et que *le parallélogramme inscrit à l'hyperbole est constant et égal au rectangle des axes.*

Pour obtenir les diamètres conjugués égaux, $a' = b'$, donne $a = b$. On voit donc qu'il n'y a que l'hyperbole équilatère qui ait des diamètres conjugués égaux; mais $a = b$, donne aussi $a' = b'$; ainsi, tous les diamètres sont alors égaux deux à deux.

213. 435. Soit α l'angle bCA que forment avec le premier axe AC les asymptotes Cb CT d'une hyperbole MN : au point quelconque M ($CP = x$, $PM = y$), menons le diamètre $CM = a'$ et la tangente ST. On sait (420) que $CP = PT = x$, $SM = MT$. L'un des angles en P est 2α, l'autre est $200° - 2\alpha$, ainsi les triangles CMP et PMT donnent (355, D)

$$CM^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy \cos 2\alpha,\quad MT^2 = x^2 + y^2 \mp 2xy \cos 2\alpha.$$

Retranchons, il vient $a'^2 - MT^2 = \pm 4xy \cos 2\alpha$: or (418), $\tang \alpha = \frac{b}{a}$, d'où $\cos \alpha = \frac{\pm a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, $\sin \alpha = \frac{\pm b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ et $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$; de plus $xy = m^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$. Donc en substituant il vient $a'^2 - MT^2 = a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$; ainsi $MT = b'$, et quel que soit le diamètre CM, son conjugué a pour
215. longueur et pour direction ST. Donc les diagonales HI GK du parallélogramme inscrit sont les asymptotes.

436. La parabole n'ayant pas de diamètres conjugués, rapportons-la à ses diamètres simples : pour transporter l'origine A en un point quelconque (a, b), et changer en outre la direction des coordonnées, il faut (383), dans $y^2 - 2px = 0$, faire $x = a + cx' + c'y'$, $y = b + sx' + s'y'$,

en conservant à $s\,s'$ $c\,c'$, les mêmes significations que 206. précédemment : ce qui donne

$$b^2-2pa+2x'(bs-pc)+2y'(bs'-pc')+2ss'x'y'+s^2x'^2+s'^2y'^2=0.$$

mais, pour que l'axe des x' soit diamètre par rapport à celui des y', il faut (427) que les termes $2ss'x'y'$ et $2y'(bs'-pc')$ disparaissent : donc $ss'=0$ et $bs'-pc'=0$. Celle-ci détermine la direction de l'axe des y', donc celle-là donne $s=0$ et $c=1$: comme a et b sont arbitraires, on voit que *toute droite* QS *parallèle à l'axe* Ax *est un diamètre ;* ces parallèles jouissent seules de cette propriété. On a donc pour l'équation générale de la parabole rapportée à ses diamètres

$$s'^2y'^2-2px'+(b^2-2pa)=0.$$

Il suit de la définition (426), que lorsqu'on a une ligne qui est diamètre par rapport à une autre, on peut faire mouvoir celle-ci parallèlement à elle-même ; prenons donc pour origine le point M où l'axe des x' coupe la courbe, nous aurons $b^2-2pa=0$, d'où. . . . . . $y'^2=\frac{2px'}{s'^2}=2p'x'$, en faisant $\frac{p}{s'^2}=p'$. L'équation $bs'-pc'=0$, donne, en désignant par θ l'angle des x' et y', $\frac{s'}{c'}$ ou $\tang\theta=\frac{p}{b}$, ce qui prouve (411) que la tangente MT à l'origine M est l'axe des y' ; $2p'$ est ce qu'on nomme le *Paramètre* du diamètre MS qu'on considère ; mais

$$\sin\theta=\frac{p}{\sqrt{(p^2+b^2)}}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{(p+2a)}},$$

donc $$2p'=\frac{2p}{\sin^2\theta}=2(p+2a)=4MF.$$

Ainsi *le paramètre est le quadruple de la distance de l'origine au foyer.*

205. Réunissons ces équations

$$b \tan \theta = p, \quad p' = p + 2a, \quad b^2 = 2pa \; . \; . \; . \; (9)$$

On voit que lorsqu'on connoît deux des quantités p, p', a, b, et θ, on peut trouver les trois autres (sauf les exceptions analytiques) et construire la courbe ; elle a pour équation $y'^2 = 2p'x'$ ou $y'^2 = \frac{2px'}{\sin^2 \theta}$.

437. De ce que les équations aux axes et aux diamètres sont de même forme, on peut tirer les conclusions suivantes.

1°. La construction donnée pour l'ellipse (431, 2°) s'applique à la parabole, lorsqu'on connoît un diamètre et son paramètre $2p'$.

2°. L'équation de la tangente en un point quelconque (x', y') est $yy' = p'(x + x')$; l'inclinaison sur le diamètre est donnée par $\frac{p'}{y'}$ qui est le rapport des sinus des angles que la tangente fait avec les axes.

3°. La sous-tangente est encore double de l'abscisse ; ainsi on mènera aisément la tangente en un point donné, connoissant le diamètre.

438. Si on a une parabole tracée MAM', on pourra déterminer un diamètre, l'axe, le sommet, les tangentes, etc... car, en menant deux cordes parallèles quelconques e joignant leurs milieux, on aura un diamètre MS : traçant ensuite la corde MM' perpendiculaire à MS, et AN parallèlement par le milieu P, on aura le sommet A....

On remarquera que $2p' = \frac{y'^2}{x'}$, ainsi le paramètre est une troisième proportionnelle à une abscisse et son ordonnée.

7. *Discussion des courbes du second degré.* 215.

439. Nous supposerons d'abord que l'équation manque du produit xy, ce qui lui donne la forme

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0\,;$$

or (425) lorsque C, ni A ne sont nuls, la courbe a nécessairement un centre (h, k), dont les coordonnées (*) sont $h = -\frac{E}{2C}$; $k = -\frac{D}{2A}$ En y transportant l'origine, et faisant pour abréger $Q = Ak^2 + Ch^2 + Dk + Eh + F$ (**), l'équation proposée devient

$$Ay'^2 + Cx'^2 + Q = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

Cette équation présente divers cas suivant les signes des coefficiens : nous allons les analyser, mais nous prendrons toujours A positif.

1°. *Si* C *est positif.*

440. Lorsque Q est positif l'équation (1) *ne peut rien représenter*, puisque trois quantités positives ne peuvent s'entredétruire ; $2y^2 + 3x^2 - 3x - 2y + 2 = 0$, ... $4y^2 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$, sont des exemples de ce cas.

441. Quand Q est $= 0$, on a $Ay'^2 + Cx'^2 = 0$, équation qui ne peut subsister qu'autant qu'on a à la fois $x' = 0$ et $y' = 0$, on a donc *un point* qui est la nouvelle origine

---

(*) On obtient aisément ces valeurs par le théorème (502) qui apprend à chasser le second terme d'un polynome.

(**) En multipliant par h et k les équations respectives.... $2Ch + E = 0$, $2Ak + D = 0$, on a $Ak^2 + Ch^2 = \frac{1}{2}(Dk + Eh)$: substituant dans la valeur de Q, elle se réduit à $Q = F - \frac{AE^2 + CD^2}{4AC}$.

des coordonnées. $y^2 + 2x^2 - 2y + 4x + 3 = 0$, donne un point $(-1, 1)$.

442. Mais lorsque Q est négatif la transformée devient $Ay'^2 + Cx'^2 = Q$, qui a la forme $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$: en multipliant la première par une indéterminée λ, on les rend identiques ; comparant terme à terme, on trouve $A\lambda = a^2$, $C\lambda = b^2$, $Q\lambda = a^2b^2$. En multipliant les deux premières, on a $AC\lambda^2 = a^2b^2$, d'où $AC\lambda^2 = Q\lambda$, et

$$\lambda = \frac{Q}{AC},\quad a = \sqrt{\frac{Q}{C}},\quad b = \sqrt{\frac{Q}{A}} \ldots (2)$$

Ce qui fait voir qu'en multipliant la transformée par $\frac{Q}{AC}$, elle est ramenée à l'équation de l'ellipse. On a donc *une ellipse* dont les axes sont connus (ou les diamètres conjugués si les coordonnées sont obliques) (*).

219. Ainsi $\frac{3}{2}y^2 + 3x^2 - 12x + 3 = 0$, donne $h = 2$, $k = 0$ et $\frac{3}{2}y'^2 + 3x'^2 = 9$; en faisant successivement $y' = 0$ et $x' = 0$, on trouve $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$. On prendra $AC = 2$, et on décrira l'ellipse $DFEO$, où $DC = \sqrt{3}$, $CO = \sqrt{6}$. Si l'angle yAx est droit, FO est le grand axe, DE est le petit.

Dans les figures suivantes Ax et Ay désigneront les axes primitifs, A la 1re. origine ; C la nouvelle.

De même $y^2 + 2x^2 - 2y = 0$ est l'équation d'une ellipse tangente à l'axe des x, dont le centre est situé sur l'axe des y ; $k = 1$, $h = 0$; $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $b = 1$.

443. Lorsque les x et y sont à angle droit et que $A = C$

(*) Les valeurs de a et b s'obtiennent plus aisément en cherchant les points où la courbe coupe les axes des x et des y. Nous n'avons pris le moyen ci-dessus que pour prouver qu'en effet la courbe étoit elliptique.

la courbe est un cercle : or l'équation la plus générale de cette courbe étant $(y-k)^2+(x-h)^2=r^2$, où *le terme* xy *manque*, et *les carrés* x^2 *et* y^2 *ont le même coefficient*, on voit que ces conditions sont les seules qui déterminent *un cercle*. $2y^2+2x^2-4y-4x+1=0$ est l'équation d'un cercle dont le rayon est $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et le centre est $(1, 1)$.

2°. *Si* C *est négatif.*

444. Lorsque $Q=0$, on a $Ay'^2=Cx'^2$, d'où . . . . $y'=\pm x'\sqrt{\frac{C}{A}}$: il est facile de voir qu'on obtient *deux droites* CD CE, qui se croisent à la nouvelle origine C. Si les axes sont à angle droit, les angles DCx', ECx' sont 220.
égaux ; leur tangente est $\sqrt{\frac{C}{A}}$.

Ainsi $y^2-4x^2+4y+12x-5=0$ devient $y'=\pm 2x'$, en transportant l'origine de A en C; on prend $AB=\frac{3}{2}$, $BC=-2$; on mène CD et CE en faisant $x'=1$, ce qui donne $y'=\pm 2$.

445. Lorsque Q est positif, l'équation (1) devient. . . $Ay'^2-Cx'^2=-Q$ qui est comparable à . . . . $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$; en pratiquant ici le même calcul que pour l'ellipse, on obtient pour λ, a et b les mêmes valeurs (2) : ainsi la courbe est *une hyperbole;* son premier axe (ou son premier diamètre) est celui des x' (*).

C'est ainsi que $2y^2-3x^2-2y-3x+\frac{1}{2}=0$, devient $2y^2-3x^2=-\frac{3}{4}$, lorsqu'on a porté l'origine de A en C; et pris $BA=-\frac{1}{2}$, $BC=\frac{1}{2}$; les axes de l'hyperbole 221.

(*) Il faut faire ici la même remarque que pour l'ellipse, car on a a et b en faisant tour-à-tour $y'=0$, $x'=0$....(388, 3°).



sont $a=\frac{1}{2}$, $b=\sqrt{\frac{3}{8}}$. De même $y^2-2x^2-2y+9=0$, donne $k=1$, $h=0$, $a=2$, $b=2\sqrt{2}$.

446. Enfin si Q est négatif, on a $Ay'^2-Cx'^2=Q$, équation comparable à celle $b^2y'^2-a^2x'^2=a^2b^2$ . . . . . de *l'hyperbole* qui coupe son 2^d. axe (ou son 2^d. diamètre).
222. $3y^2-2x^2+2x+3y=\frac{1}{2}$ donne $h=\frac{1}{2}=AB$, $k=-\frac{1}{2}=BC$; d'où $3y'^2-2x'^2=\frac{3}{4}$, équation qui revient à celle du n°. précédent en mettant x pour y. On a donc la même hyperbole, mais disposée comme on le voit fig. 222.

223. 447. Faisons varier Q, dans l'équation $Ay'^2-Cx'^2=-Q$ qui est à l'hyperbole $MANLOI$; comme $y=0$ et $x=0$, donnent $a=\sqrt{\frac{Q}{C}}=CA$, $b=\sqrt{\left(-\frac{Q}{A}\right)}$; il en résulte qu'en prenant $AD=AD'=\sqrt{\frac{Q}{A}}$ parallèle à Cy', quelle qu'en soit la direction, CD et CD' sont les asymptotes (417, 435). Or, à mesure que Q décroît, le point A s'approche de C; mais, comme les diamètres conjugués décroissent proportionnellement, les asymptotes demeurent les mêmes. Q devenant nul, on a $Ay'^2-Cx'^2=0$ qui est représenté par ces droites. Enfin si Q est négatif, on a quation $Ay'^2-Cx'^2=Q$ qui est celle de l'hyperbole $M'A'N'\ I'O'L'$: A' s'éloigne de C' à mesure que Q croît, et on peut de même voir que les asymptotes restent encore CD, CE.

3°. *Si* C *ou* A *est nul.*

448. Nous avons dit que si, outre le terme Bxy, l'équation manquoit de Ay^2 ou Cx^2, il faudroit une analyse particulière pour ces cas. Prenons seulement le dernier et soit proposé $Ay^2+Dy+Ex+F=0$. L'autre cas se traite de même, ou plutôt revient à celui-ci en changeant x en y.

Transportons l'origine : $x = x' + h$, $y = y' + k$ donne

$$Ay'^2 + (2Ak + D)y' + Ex' + (Ak^2 + Dk + Eh + F) = 0.$$

Pour déterminer h et k, nous supposerons la nouvelle origine en un point de la courbe, et nous chasserons le terme en y' : nous aurons donc

$$Ak^2 + Dk + Eh + F = 0, \quad 2Ak + D = 0;$$

la transformée est $Ay'^2 + Ex' = 0$, qui est visiblement à une *Parabole* rapportée à son diamètre ou à son axe suivant que les coordonnées sont obliques ou rectangles.

Soit $2y^2 + 5y - 4x = \frac{7}{8}$; on trouve $h = -1 = AB$, 224.
$k = -\frac{5}{4} = BC$; d'où $y'^2 = 2x'$. Le paramètre est 2.

$y^2 - 2y + x = 0$, donne $AB = BC = 1$; la transformée est $y'^2 = -x'$; la courbe est tournée vers les x' négatifs. 225.

Enfin $x^2 + 3y - 2x + 1 = 0$, devient $x'^2 + 3y' = 0$, 226.
en chassant les termes constans et en y, on prend $AC = 1$, et la parabole est dirigée vers les y' négatifs. Le paramètre est 3.

449. Ce calcul ne peut pas s'effectuer dans tous les cas; car $2Ak + D = 0$, donne, il est vrai k; mais si $E = 0$, la 2e. relation, $Ak^2 + Dk + F = 0$, laisse h arbitraire et ne s'accorde avec la première que quand $D^2 - 4AF = 0$. Il reste donc à traiter ce cas. En posant $2Ak + D = 0$, la transformée est $4A^2y'^2 = D^2 - 4AF$, ou $y'^2 = Q$, en faisant $Q = \frac{D^2 - 4AF}{4A^2}$. La nouvelle origine est d'ailleurs un point quelconque de la parallèle aux x qui a pour équation $y = k$.

1°. Si Q (ou $D^2 - 4AF$) est négatif, $y'^2 + Q = 0$ ne représente visiblement *rien*. C'est ce qui arrive pour $2y^2 - 3y + 4 = 0$ et $x^2 - 6x + 10 = 0$.

2°. Si Q est nul (ou $D^2 - 4AF = 0$), on a $Ay'^2 = 0$ ou $y' = 0$; ainsi l'équation appartient à *une Droite* qui est l'axe des x'. On trouve que $y^2 - 4y + 4 = 0$, $x^2 - 6x + 9 = 0$ sont les équations de droites, l'une parallèle aux x, l'autre aux y. La proposée $Ay^2 + Dy + F = 0$ est alors un carré parfait (138).

3°. Enfin si Q (ou $D^2 - 4AF$) est positif, on a . . . $y' = \pm \sqrt{Q}$, ou *deux droites parallèles* aux x, et placées de part d'autre à égale distance de cet axe. $2y^2 + 2y = 7$, en faisant $k = -\frac{1}{2}$, donne $y' = \pm \frac{1}{2}\sqrt{15}$. De même $x^2 - 8x + 7 = 0$ devient $x' = \pm 3$, pour $h = 4$.

450. On peut encore discuter par le même procédé que précédemment l'équation $Bxy + Dy + Ex + F = 0$, privée des deux carrés y^2 et x^2, mais pourvue du terme en xy. En transportant l'origine au centre, il vient

$$Bk + E = 0, \quad Bh + D = 0, \quad B^2x'y' + Q = 0,$$

en faisant . $Q = BF - DE$,
k et h sont connus par des équations qui ne présentent pas de cas d'exception. $B^2x'y' + Q = 0$ est visiblement (418) l'équation d'*une Hyperbole* rapportée à ses asymptotes : de
223. sorte que si CD' est l'axe des x' et CD celui des y', la courbe est placée dans l'angle DCD' ou DCE suivant que Q est négatif ou positif. Si $Q = 0$, on a les *Asymptotes* mêmes, à cause de $x'y' = 0$.

227. Ainsi $xy - 2x + y + m = 4$ donne $k = 2$, $h = -1$; on prendra $AB = 1$, $BC = 2$; Cx', Cy' seront les asymptotes de l'hyperbole $x'y' = 2 - m$; elle sera MN OP tant que m sera < 2; ou $M'N'$ $O'P'$ pour $m > 2$; $m = 2$ donne les asymptotes.

451. Nous savons donc discuter dans tous les cas l'équation du second degré privée du terme xy, ou des deux

carrés x^2 et y^2 : il suffit pour cela de transporter l'origine au centre, s'il y a lieu; ou dans le cas contraire, en un point de la courbe. On peut même remarquer qu'on ne trouve que l'un des huit cas suivans. 1°. *un Point*, 2°. *une Ellipse*, 3°. *deux Droites, qui se croisent*, 4°. *une Hyperbole*, 5°. *une Parabole*, 6°. *une Droite*, 7°. *deux Droites parallèles*, 8°. *Rien*.

452. Soit maintenant l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \ldots (3)$$

proposons-nous d'en chasser le terme xy par une transformation d'axes. Nous supposerons d'abord que les coordonnées, qui jusqu'ici ont été quelconques, sont préalablement rendues rectangulaires, ce qui ne change pas le degré de la proposée (384). De plus passons de ce système d'axes à un autre aussi rectangulaire, et faisons pour cela $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$, $y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$: déterminons enfin l'angle θ que forment entre eux les axes des x et x', en égalant à zéro le terme en $x'y'$; il vient $(A-C)\, 2\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$, ou

$$(A-C)\sin(2\theta) + B\cos(2\theta) = 0; \text{ donc } \tang(2\theta) = \frac{-B}{A-C}.$$

ce calcul ne souffre aucune exception; ainsi les cas ci-dessus exposés sont les seuls que puisse présenter toute équation du second degré. Deux de ces cas ne sont pas des sections coniques; en effet, partout où il existe un cône et un plan, l'intersection ne peut être imaginaire ou deux droites parallèles. Il n'est donc vrai de dire que *toute équation du second degré est celle d'une section conique, que lorsqu'elle ne tombe pas dans ces deux cas particuliers.*

Comme, en faisant mouvoir le plan parallèlement, jusqu'à ce qu'il passe par le sommet, le cône est coupé suivant

un point, une droite ou deux droites, respectivement lorsqu'il donnoit une ellipse, une parabole ou une hyperbole : on a coutume de *regarder le point comme une sorte d'ellipse, la droite comme une parabole; et deux droites comme une hyperbole*, ce qui d'ailleurs n'intéresse nullement la théorie.

Pour discuter l'équation (3), on pourroit ainsi chasser le terme xy, puis transporter l'origine, ainsi qu'il a été expliqué : mais, dans les applications, cette marche introduit $\sin\theta$, $\cos\theta$, dont les valeurs ne sont qu'accidentellement rationnelles. Les calculs deviennent très-compliqués, et il est préférable alors d'employer la voie suivante, qui d'ailleurs s'applique à tous les cas.

453. Comme on connoît d'avance toutes les lignes comprises dans l'équation générale (3), il ne s'agit, pour les distinguer entre elles, que de trouver un caractère propre à chacune : et il est évident que les limites de la courbe remplissent ce but. Pour les obtenir, résolvons l'équation (3) par rapport à y : il vient une valeur de la forme (*)

$$y = \alpha x + \beta \pm \frac{1}{2A} \sqrt{(mx^2 + nx + p)} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

α β m n et p sont des constantes connues. Chaque valeur de x donne deux points de la courbe : on n'en auroit qu'un seul, si le radical étoit rendu nul; et s'il étoit imaginaire, la courbe n'auroit pas de point correspondant à l'abscisse dont il s'agit. Lorsque m est négatif, comme en prenant pour x des valeurs suffisamment grandes positives ou négatives (139, 7°.), $mx^2 + nx + p$ prend le signe du plus grand

(*) $\alpha = -\dfrac{B}{2A}$, $\beta = -\dfrac{D}{2A}$, $m = B^2 - 4AC$, ... $n = 2(BD - 2AE)$; $p = D^2 - 4AF$; voy. n°. 139, p. 168.



terme mx^2, on voit que le radical devient imaginaire, de sorte que la courbe est alors limitée dans les deux sens. Elle seroit illimitée, si m étoit positif : enfin m nul réduiroit le radical à $\sqrt{(nx+p)}$, et on voit que la courbe seroit limitée seulement dans un sens, puisque le signe de nx, change avec x. 227.

La nature de nos courbes dépend donc de m, ce qui nous force de distinguer trois cas dans notre analyse générale, suivant que m est négatif, positif ou nul.

Mais, avant tout, remarquons que, pour construire les ordonnées PM, PM' qui répondent à une abscisse $AP=x'$, il faut d'abord porter parallèlement à l'axe des y (dont la direction est donnée et quelconque) $PN=\alpha x+\beta$, puis, pour ajouter et soustraire .... $\sqrt{(mx^2+nx+p)}$, on en portera la valeur de part et d'autre de N en M et en M', et N est le milieu de MM'. Tous les points N qui satisfont à l'équation 228 et 229.

$$y=\alpha x+\beta \quad .\ .\ .\ .\ (5)$$

coupent donc les cordes parallèles à Ay en deux parties égales; ainsi on tracera la droite BN, qui est le *Diamètre* de la courbe (426).

Aux points D et D' d'intersection de la courbe avec son diamètre, les équations (4) et (5) ont lieu ensemble (372), et ces points sont donnés par les racines de

$$mx^2+nx+p=0 \quad .\ .\ .\ .\ (6)$$

On voit de plus que les ordonnées ED $E'D'$ correspondantes, sont tangentes à la courbe, puisque le radical étant nul, la proposée est le carré de $y-\alpha x-\beta=0$; ainsi, les points d'intersection sont réunis en un seul, aux points D et D', (423).

1er. CAS. *Courbes limitées en tout sens*; m *négatif.*

454. 1°. *Si les racines de* (6) *sont réelles* en les dési-
228. gnant par a et b, et prenant $AE = a$, $AE' = b$, on aura les tangentes et les points d'intersection cherchés D, D' : le radical de (4) prendra la forme $\sqrt{\{-m(x-a)(x-b)\}}$; il n'est réel qu'autant que les facteurs $x-a$, $x-b$ sont de signes contraires, de sorte que x est $> a$ et $< b$. La courbe ne s'étend donc qu'entre les limites EF, $E'F'$, elle donne une courbe fermée; c'est une *Ellipse.*

Remarquons que pour obtenir E, E', on a tiré de (6) des racines de la forme $x = h \pm \sqrt{f}$; on a donc porté $AK = h$, puis $KE = KE' = \sqrt{f}$. Donc C est le milieu du diamètre DD' ou le centre de l'ellipse (427) : ainsi, on obtiendra le conjugué en cherchant la valeur que prend $\frac{1}{2A}\sqrt{(mx^2 + nx + p)}$ lorsqu'on fait $x = h$, ou l'ordonnée centrale CO à partir du diamètre. La courbe étant rapportée à ses diamètres conjugués, il sera facile de la décrire.

228. Par exemple, $y^2 - 2xy + 3x^2 - 2y - 4x + 5 = 0$ donne $y = x + 1 \pm \sqrt{(-2x^2 + 6x - 4)}$; on prend $AB = 1$, et on mène le diamètre BN, $(y = x + 1)$; il fait avec Ax un angle de 50°, lorsque les x et y sont à angle droit. Le radical égalé à zéro donne $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$, et prend la forme $\sqrt{\{-2(x-1)(x-2)\}}$: donc $AK = \frac{3}{2}$, $KE = KE' = \frac{1}{2}$ donnent les points D D' d'intersection de la courbe avec son axe, le centre C et les tangentes limites EF, $E'F'$, puisque y n'est réel que quand on prend $x > 1$ et < 2. On a donc l'ellipse, fig. 228.

Quant aux diamètres conjugués, $D'D$ est l'un; en faisant $x = \frac{3}{2}$ sous le radical, on a $2b' = \sqrt{2}$ pour

l'autre. Ces diamètres sont égaux ici, lorsque l'angle yAx est droit. 228.

Pareillement $y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ donne l'ellipse $DOD'O'$; $AK = 2$, $EK = E'K = \sqrt{2}$, $CK = 1$, C est le centre. $y = 0$ donne $x^2 - 2x + 1 = 0$, carré de $x - 1$; donc, si on prend $AI = 1$, la courbe est tangente en I à Ax ; $OO' = 2b' = \sqrt{2}$. 230.

Il est inutile de dire que dans les constructions, il faut sur-tout avoir égard aux signes ; ainsi pour. . . . $4y^2 + 8xy + 8x^2 + 12x + 8y + 1 = 0$, on a . . . $y = -x - 1 \pm \sqrt{(-x^2 - x + \frac{3}{4})}$; on construit BD dont l'équation est $y = -x - 1$; de $x^2 + x = \frac{3}{4}$, on tire $x = -\frac{1}{2} \pm 1$, on prend $AK = \frac{1}{2}$, et $KE = KD' = 1$, ce qui donne les limites tangentes ED, $E'D'$ de l'ellipse : C en est le centre, et on trouve $b' = 1$. 231.

2°. *Si les racines de l'équation* (6) *sont égales*, a étant leur valeur, le radical équivaut à $\sqrt{-m(x-a)^2}$; ainsi (4) devient $y = \alpha x + \beta \pm \frac{1}{2A}(x-a)\sqrt{-m}$: on ne peut donc rendre y réel qu'en prenant

$$x = a, \text{ d'où } y = a\alpha + \beta :$$

ainsi on n'a qu'*un point* ; ses coordonnées sont connues.

Il est aisé de voir qu'en effet, la proposée équivaut ici à $2A(y - \alpha x - \beta)^2 + (x-a)^2 m = 0$; et comme la somme de deux quantités positives ne peut être nulle, à moins que chacune ne le soit en particulier, la proposée se partage d'elle-même en deux autres.

Ainsi $y^2 - xy + \frac{5}{4}x^2 - 2x + 1 = 0$ donne le point dont les coordonnées sont $x = 1$, et $y = \frac{1}{2}$. De même $x^2 + y^2 = 0$ donne l'origine.

3°. *Si les racines de l'équation* (6) *sont imaginaires*, aucune valeur de x ne peut faire changer de signe au

trinome $-mx^2+nx+p$, (139, 7°.); il demeure donc toujours de même signe que son plus grand terme $-mx^2$; ainsi $\sqrt{(-mx^2+nx+p)}$ est sans cesse imaginaire : donc la proposée *ne représente rien*.

En effet, cette équation revient alors à celle-ci $2A(y-\alpha x-\beta)^2+(mx^2-nx-p)=0$, dont les deux parties sont positives et ne peuvent s'entredétruire ; par conséquent il est absurde de supposer leur somme $=0$, puisque la seconde ne peut, comme ci-dessus, être rendue nulle.

C'est ce qui arrive pour $y^2-2xy+2x^2-2x+4=0$.

Pour que m soit négatif, comme $m=B^2-4AC$, il faut que les trois premiers termes de la proposée (3), $Ay^2+Bxy+Cx^2$ forment une quantité plus grande qu'un carré parfait. On voit que dans le 1er. exemple ci-dessus $y^2-2xy+3x^2=(y-x)^2+2x^2$.

2e. CAS. *Courbes illimitées en tout sens ; m positif.*

455. Ici, au contraire, les trois premiers termes. . . $Ay^2+Bxy+Cx^2$ sont moindres qu'un carré.

229. 1°. *Quand les racines de l'équation* (6) *sont réelles*, $a=AE$, $b=AE'$ donnent, comme ci-dessus, les points D et D' d'intersection de la courbe et du diamètre BN, et les tangentes EF, $E'F'$; puis le radical prend la forme $\sqrt{m(x-a)(x-b)}$; il n'est réel qu'autant que $x-a$ et $x-b$ sont de même signe, c.-à-d. que x est $>b$ ou $<a$: on ne peut donc prendre pour x des valeurs entre $a=AE$ et $b=AE'$, et la courbe s'étend à l'infini de part et d'autre des limites EF $E'F'$; ainsi on a une *hyperbole*.

Pour obtenir le diamètre conjugué de DD', comme

le centre C est au milieu de DD', on fera $x = AK = h$ 229.
sous le radical, on rendra le résultat réel (429), et on aura ainsi b'. On en tire ensuite la position des asymptotes (435).

Soit par exemple, $y^2 - 2xy - x^2 - y + 7x - \frac{15}{4} = 0$, on en tire $y = x + \frac{1}{2} \pm \sqrt{(2x^2 - 6x + 4)}$. On trace d'abord le diamètre BN, $(y = x + \frac{1}{2})$; $2x^2 - 6x + 4 = 0$ donne $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$; ainsi le radical devient ..... $\sqrt{2(x-1)(x-2)}$; on prend $AK = \frac{3}{2}$, ... $EK = E'K = \frac{1}{2}$, on a les limites EF $E'F'$ tangentes en D et D'; et comme x est > 2 ou < 1, on obtient l'hyperbole MM'.

Pour trouver le diamètre conjugué de DD', on fait $x = AK = \frac{3}{2}$ dans $\sqrt{(2x^2 - 6x + 4)}$, et on rend réel; on a $b' = \sqrt{\frac{1}{2}}$. En prenant $D'F' = D'H = \sqrt{\frac{1}{2}}$, on forme le parallélogramme inscrit, dont les diagonales GF', FH sont les asymptotes de notre courbe.

2°. *Lorsque les facteurs de* $mx^2 + nx + p$ *sont imaginaires*, la courbe ne coupe pas son diamètre BN: de 232.
plus, ce trinome doit toujours conserver le même signe que $+mx^2$, quelque valeur qu'on attribue à x, (139, 7°.), donc chaque abscisse donne toujours des ordonnées réelles, la courbe s'étend à l'infini de part et d'autre, et elle est une *hyperbole* disposée comme on le voit, fig. 232.

Quant aux diamètres conjugués, BN étant celui qui ne coupe pas la courbe, le centre est sur BN: or, si l'origine étoit au centre, les abscisses égales et de signe contraire (424) répondroient à des ordonnées égales; ainsi le radical devroit être de la forme $\sqrt{(mx^2 + p)}$: si donc on veut transporter l'origine au centre, il faut faire $x = x' + h$, et déterminer h par la condition

232. que le second terme de $mx^2 + nx + p$ disparoisse (502), ou $h = -\frac{n}{2m}$: c'est l'abscisse du centre, (la même valeur que précédemment).

On prendra une abscisse AK égale à h, et l'ordonnée KC correspondante donne le centre C. On fera donc $x = h$ dans $\frac{1}{2A}\sqrt{(mx^2 + nx + p)}$, on aura $DC = a'$. Pour obtenir b', il faut chercher les points de rencontre de BN avec la courbe ; en prenant la partie imaginaire des racines de $mx^2 + nx + p = 0$, et la rendant réelle, on a $KO = KO'$ pour les abscisses des extrémités EE' du diamètre conjugué prises à partir de celle du centre.

Comme les parallèles FH, GI au diamètre BN sont tangentes à la courbe en D et D', les ordonnées $O'F$, IH déterminent aussi le parallélogramme inscrit, et les asymptotes IF, GH.

232. Soit par exemple $y^2 + 2xy - 2y - x = 0$, on trouve $y = -x + 1 \pm \sqrt{(x^2 - x + 1)}$; le diamètre BN a pour équation $y = -x + 1$; comme $x^2 - x + 1 = 0$ donne $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, la courbe ne coupe pas BN ; de plus $x^2 - x + 1$ étant toujours positif, y est aussi toujours réel ; ainsi, on a l'hyperbole donnée dans la figure.

Mais pour trouver les diamètres conjugués, on construit $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $AK = \frac{1}{2}$, $KO = \frac{1}{2}\sqrt{3} = KO'$, donnent le centre C, et le second diamètre EE' ; de plus en faisant $x = \frac{1}{2}$ dans $\sqrt{(x^2 - x + 1)}$, on a $a' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

3°. *Si les racines de l'équation* (6) *sont égales*, le radical équivaut à $\sqrt{m(x-a)^2}$, et l'équation (4) devient $y = \alpha x + \beta \pm (x - a)\sqrt{m}$. Or, cette expression se décompose en deux autres.

$y = x(\alpha + \sqrt{m}) + \beta - a\sqrt{m}, y = x(\alpha - \sqrt{m}) + \beta + a\sqrt{m}$. 233.

On a donc *deux droites* faciles à décrire d'après leurs équations. *Elles se croisent* en un point du diamètre pour lequel $x = a$; il suffira de chercher un second point de chacune, on fera $x = 0$, et on verra qu'il faut porter sur l'axe des y, de part et d'autre de son point de rencontre avec le diamètre, la longueur $a\sqrt{m}$ pour obtenir ceux où les droites coupent cet axe.

On se rend facilement raison du fait analytique, qui conduit à trouver deux droites ; car, transposant et carrant, la proposée (4) peut se mettre sous la forme $y - \alpha x - \beta = (x - a)\sqrt{m}$, ou $(y - \alpha x - \beta)^2 - (x - a)^2 m = 0$; qu'on décompose en deux facteurs de la forme. . . . . . $(y + kx + l)\ (y + k'x + l') = 0$: ainsi la proposée est satisfaite en égalant l'un ou l'autre à zéro; elle se partage, comme on voit, en deux équations de droites qui ne sont pas simultanées.

Soit, par exemple, $4y^2 - 8xy + x^2 + 4y + 2x - 2 = 0$, 233.
on trouve $y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(3x^2 - 6x + 3)}$; or . . $3x^2 - 6x + 3 = 0$, donne $x = 1$; le diamètre. . . . . BN, $(y = x - \frac{1}{2})$ est donc coupé en un seul point N pour lequel $DA = 1$; et comme la proposée revient à $y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}(x - 1)\sqrt{3}$; on a deux droites. $x = 0$ donne $y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$; ainsi on prend $BE = BE' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, et on trace les lignes EN, $E'N$.

Soit proposé l'équation $y^2 - 2xy - 3x^2 - 4k^2 = 0$, 234.
on en tire $y = x \pm 2\sqrt{(x^2 + k^2)}$; $y = x$ donne le diamètre BN ; et on voit qu'il n'est pas coupé par la courbe, et qu'on a l'hyperbole $MO\ M'O'$. Le centre est en C ; on prend $CO = CO' = 2k$; OO' est le premier diamètre ; puis $CE = CE' = k$ donne le second DD' et les asymptotes HF, IG. A mesure que k décroîtra, la courbe se rapprochera du centre et des

234. asymptotes qui ne changeront pas ; $k = 0$ donne ces droites mêmes. Enfin, si k^2 prend un signe contraire, l'hyperbole $GD'\ ID$ est tracée dans l'autre angle entre les mêmes asymptotes, et s'en éloigne, à mesure que A croît.

456. Parmi les valeurs des coefficiens qui rendent m positif, il peut arriver que A soit $= 0$; car m devient $= B^2$. Nos calculs, cessent d'être applicables ; en changeant x en y et y en x, ce qui ne produiroit qu'une inversion dans les axes, on pourroit les effectuer ; mais il est préférable de résoudre l'équation proposée par rapport à x, et de faire les mêmes raisonnemens et les constructions analogues sur l'axe des x.

235. Soit, par exemple, $x^2 - 2xy + 2x - 3y + c = 0$, on a $x = y - 1 \pm \sqrt{(y^2 + y - c + 1)}$; la droite DD' ($y = x + 1$) est diamètre, c.-à-d. coupe en deux parties égales, toutes les cordes parallèles aux x. . . . . $y^2 + y = c - 1$, donne $y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(c - \frac{3}{4})}$; si donc $c > \frac{3}{4}$, on prendra $AK = \frac{1}{2}$, $KE = KE' = \sqrt{(c - \frac{3}{4})}$, et on aura en D et D' les points où l'hyperbole $MD\ M'D'$ coupe le diamètre DD'. En faisant $y = -\frac{1}{2}$ dans. . . $\sqrt{(y^2 + y - c + 1)}$, et rendant réel, on a $\sqrt{(c - \frac{3}{4})}$ pour le conjugué de DD', ce qui donne les asymptotes $F'G$ et FH, dont la seconde est parallèle aux y.

Si $c = \frac{3}{4}$, on a les asymptotes mêmes ; et si $c < \frac{3}{4}$ l'hyperbole demeure entre les mêmes asymptotes, mais elle passe en HN, $F'N'$ dans l'autre angle.

457. On peut trouver les asymptotes, par un moyen bien facile ; on transporte l'origine au centre, ce qui met la proposée sous la forme $Ay^2 + Bxy + Cx^2 = Q$; or toute droite qui passe par l'origine, ayant pour équation $y = ax$, les abscisses des points où elle coupe la courbe sont $x = \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{Aa^2 + Ba + C}\right)}$. On a ici

m positif, ou $B^2 - 4AC > 0$; on pourra donc diriger la droite (139, 7°.), de sorte que a rende $Aa^2 + Ba + C$, positif, négatif ou nul. Dans le premier cas, la droite coupe la courbe; elle ne la coupe pas dans le deuxième, et lorsque $Aa^2 + Ba + C = 0$, la droite est asymptote (417). Ainsi, les équations des asymptotes de l'hyperbole sont $y = ax$, où 235.

$$a = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{m}}{2A},$$

valeur reelle par supposition.

Ainsi, pour $y^2 - 2xy - x^2 + 4 = 0$, après avoir trouvé le diamètre AN, et les limites DE, $D'E'$; $AE = \sqrt{2}$; on obtient $a = 1 \pm \sqrt{2}$. Pour construire $y = ax$, on prend $AB = 1$, et comme $BF = 1$, on prend. . . $FG = FH = \sqrt{2} = AE$; et on a les asymptotes AG, AH. 236.

Si $C = 0$, on a $a = -\frac{B}{A}$ et $a = 0$. En général, *l'une des asymptotes est parallèle aux* x *ou aux* y, *suivant que l'équation de l'hyperbole est privée du terme* x^2 *ou* y^2. C'est ce qui a lieu, fig. 232 et 235. Si l'origine est au centre, l'axe est lui-même asymptote.

3ᵉ. CAS. *Courbes illimitées d'un seul côté*; $m = 0$.

458. Lorsque $m = 0$, ou $B^2 - 4AC = 0$, les trois premiers termes de la proposée, ou $Ay^2 + Bxy + Cy^2$, forment un carré (138) : le radical de l'équation (4) se réduit à $\sqrt{(nx + p)}$. Après avoir tracé le diamètre BN, on trouve son point D d'intersection avec la courbe et sa tangente EF, en faisant $nx + p = 0$; soit . . . . . $x = a = AE$ la racine de cette équation, le radical devient $\sqrt{n(x-a)}$; pour que ce radical soit réel, il faut que n et $x - a$ soient de même signe : donc x est $> a$, 237.

237. et la courbe est située comme DM, lorsque n est positif ; mais si n est négatif, x est $< a$, et on a DM'. La courbe, qui s'étend à l'infini d'un seul côté, est donc *une parabole*.

On peut aisément en déduire le paramètre de ce diamètre, à l'aide d'un seul point de la courbe, ou même l'axe à l'aide de deux cordes : *Voyez* n°. 438. Ainsi on peut soumettre la courbe à une description rigoureuse.

237. Soit $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - 2y - x + 5 = 0$, d'où $y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{(2x - 4)}$; on prend $AE = 2$, EF est limite, et la courbe est située comme DM.

Pour $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - 2y + 3x - 3 = 0$, on a le même diamètre ; et comme le radical est $\sqrt{(-2x + 4)}$, on a la courbe DM'.

Mais si n est aussi $= 0$, alors l'équation (4) se présente sous la forme $y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{p}$. Or,

1°. Si p est négatif, l'imaginaire subsiste toujours, et *il n'y a pas de ligne*. Telle est l'équation

$$(y + x)^2 - 2y - 2x + 2 = 0.$$

238. 2°. Si p est nul, $y = \alpha x + \beta$, on n'a qu'*une droite* ; telle est l'équation $(y + x)^2 - 2y - 2x + 1 = 0$, représentée par BN.

3°. Si p est positif, on a $y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{p}$, c.-à-d. *deux droites parallèles*, qu'on trace en portant $\sqrt{p} = BD$ sur l'axe des y, de part et d'autre du point B où le diamètre BN rencontre cet axe. Ainsi. . . . . $(y + x)^2 - 2y - 2x = 1$, donne $y = -x + 1 \pm \sqrt{2}$; on prend $AB = AN = 1$, BN est le diamètre ; puis $BD = BD' = \sqrt{2} = BN$; et on mène DE, $D'E'$ parallèles à BN.

En un mot, $(y + x)^2 - 2y - 2x + 2 = K$ donne

$y = -x + 1 \pm \sqrt{(K-1)}$: on trace BN, DE, $D'E'$ ainsi 238.
qu'on vient de le dire, en prenant BD. . . . .
$= BD' = \sqrt{(K-1)}$: or plus K diminue, plus les parallèles se rapprochent du diamètre BN, avec lequel elles se confondent enfin lorsque $K = 1$; si K est < 1, l'équation ne représente rien.

On remarque dans ces deux derniers cas que le diamètre BN est le lieu d'*une infinité de centres*; car quelque point G qu'on prenne sur BN, il doit diviser la partie IM d'une droite quelconque en deux également. Ceci explique ce qu'on a vu (425).

Du reste, on peut se rendre raison du fait analytique qui se rapporte à ces trois cas; la proposée revient en effet à $(y - \alpha x - \beta)^2 - p = 0$: or, 1°. si p est négatif, comme la somme des deux valeurs positives ne peut devenir nulle, l'équation est absurde; 2°. si p est nul, la proposée est le carré de . . . . . $y - \alpha x - \beta = 0$; 3°. enfin, si p est positif, la proposée est le produit des deux facteurs $y - \alpha x - \beta + \sqrt{p}$ par $y - \alpha x - \beta - \sqrt{p}$: ainsi elle est satisfaite en égalant séparément à zéro chacun d'eux; elle se décompose donc en deux autres.

459. Il résulte de cette analyse que,

I. Si m, ou $B^2 - 4AC$ est négatif, $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ est plus grand qu'un carré; la courbe est fermée; elle est *une Ellipse*, (*ou un cercle*) *ou un point*, *ou rien*. Ici C doit être positif.

II. Si m ou $B^2 - 4AC$ est positif, $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ est moindre qu'un carré; la courbe est formée de deux parties illimitées; elle est *une hyperbole*, *ou deux droites qui se croisent*. C'est ce qui arrive, par exemple, lorsque C est négatif, ou lorsqu'il manque x^2 ou y^2, (ou l'un et l'autre) xy restant.

238. III. Si m ou $B^2 - 4AC = 0$, $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ est un carré, la courbe s'étend à l'infini d'un seul côté; elle est *une parabole*, *une droite*, *deux parallèles*, *ou rien*. Ce cas a lieu, par exemple, lorsque xy manque, ainsi qu'un des carrés x^2 ou y^2.

IV. On peut composer à volonté une équation du second degré qui rentre dans celle qu'on voudra de ces circonstances. Il suffira de recourir à l'équation (4), et d'y déterminer arbitrairement les constantes α, β, m,... seulement on aura soin de composer le radical, de sorte qu'il satisfasse aux conditions requises : ainsi m sera négatif pour une ellipse, et $mx^2 + nx + p = 0$ aura ses racines réelles : m sera positif pour une hyperbole, et suivant que l'équation précédente a ses racines réelles ou imaginaires, cette courbe coupera ou ne coupera pas son diamètre, etc. On transposera ensuite $\alpha x + \beta$, puis élevera au carré.

Si on veut que l'équation représente un point, une ou deux droites, ou rien, il sera plus commode de la former ainsi; L et M étant de la forme $ky + lx + g$;

1°. Pour un point, on a $L^2 + M^2 = 0$

2°. Pour une droite, on a $L^2 = 0$

3°. Pour deux droites $LM = 0$; elles seront parallèles si $\frac{k}{l}$ est le même dans L et M.

4°. Pour que l'équation ne représente rien, ... $L^2 + M^2 + \alpha = 0$, α étant un nombre quelconque positif.

CHAPITRE V.

PROBLÈMES D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE.

1. *De la Génération des Courbes.*

460. I. **Pour** mieux entendre notre théorie, supposons * qu'on veuille trouver la courbe qui résulte de l'intersection 239. continuelle de deux droites AM, BM qui tournent autour de A et B, et sont toujours à angle droit en M.

Prenons les *Génératrices* dans une de leurs positions AM, MB : soit placée l'origine au milieu C de AB; et $AC=r$. les lignes AM et MB qui passent, l'une en $A(-r, o)$ et l'autre en $B(r, o)$ ont pour équations

$$y=a(x+r),\ y=a'(x-r)\ldots\ldots(1)$$

de plus on a $$aa'+1=0\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

puisque ces droites sont perpendiculaires : les valeurs de a et a' qui ne satisfont pas à cette condition, répondent à des droites AN et BN qui ne sont pas génératrices ; et comme $aa'+1=0$, ne peut déterminer que a ou a', l'autre demeure arbitraire, ce qui revient à dire qu'on peut attribuer à l'une des droites telle direction qu'on veut. Si donc on met $-\frac{1}{a}$ pour a', les équations des droites génératrices seront $y=a(x+r)$, $y=-\frac{1}{a}(x-r)$: x et y désignent dans leur système les coordonnées CP, PM du point d'intersection, qui répond à une direction donnée de AM. Si donc on élimine a entre ces équations,

239. x et y désigneront la même chose dans le résultat, seulement les génératrices seront quelconques, puisqu'elles ne sont distinguées entre elles que par a, qui n'y entre pas.

Ainsi l'élimination de a et a' entre les équations, 1 et 2 donne l'équation de la courbe cherchée : on trouve. . . .

$a=\frac{y}{x+r}$, $a'=\frac{y}{x-r}$; $aa'+1=0$ devient $y^2+x^2=r^2$: donc on a un cercle dont le diamètre est $AB=2r$.

II. Si les deux génératrices AM, MB étoient assujéties

240.* à former un angle donné AMB, dont la tangente soit t, $AC=CB=r$, il faudroit éliminer a et a' entre les équations (1) et. . . .

$t=\frac{a'-a}{1+aa'}$: on auroit $(x^2+y^2-r^2)\,t=2ry$. En discutant cette équation ainsi qu'il a été dit (443), on verra que la courbe est un cercle dont le rayon est . . . . . $\sqrt{\left(r^2+\frac{r^2}{t^2}\right)}$; et qu'en prenant sur Cy, $CO=\frac{r}{t}$, C est le centre et OB le rayon.

En général, au lieu de supposer la courbe décrite par la trace d'un point qui se meut d'une manière déterminée, on peut la considérer comme engendrée par l'intersection continuelle de deux lignes (droites ou courbes) données, mais variables dans leurs positions ou leurs formes suivant une loi connue. On prendra ces lignes dans l'une des positions convenables, et on aura leurs équations, telles que $M=0$, $N=0$: de plus les deux constantes qui y entrent sont assujéties, dans leurs variations, à une condition donnée $P=0$. En faisant de nouveau le raisonnement ci-dessus, on prouvera que si on élimine ces deux constantes entre ces trois équations, on aura pour résultat celle de la courbe.

S'il y avoit trois constantes variables, outre $P=0$ on

devroit avoir une autre équation de condition $Q=0$; il 240.*
faudroit éliminer ces trois constantes entre les quatre équations $M=0$, $N=0$, $P=0$, $Q=0$. Et ainsi de suite... de manière à avoir toujours une équation de plus qu'il n'y a de quantités à éliminer.

S'il y avoit plus de constantes que d'équations moins une, l'équation finale seroit celle de la courbe cherchée, mais il y auroit un ou plusieurs *Paramètres* variables. Ainsi, le problème seroit indéterminé, et on y satisferoit par une série de courbes.

Lorsqu'il y a autant d'équations que de constantes, il en résulte des valeurs de x et y en nombre fini, on n'a plus que divers points; et s'il y a plus d'équations encore le problême est absurde.

Tout ceci sera éclairci par des exemples.

III. Quelle est la courbe AM dont chaque point M est 205.*
à la même distance d'un point fixe F et d'une droite QD donnés? Menons FD perpendiculaire sur QD; soit $DF=p$; prenons le milieu A de AF pour origine, Ax pour axe des x, Ay parallèle à QD pour axe des y: A est visiblement un point de la courbe d'après la génération.

On peut concevoir que QM se meut parallèlement à Ax, pendant que FM tourne autour du point $F(\frac{1}{2}p, 0)$, les équations de ces droites sont $y=b$, $y=a(x-\frac{1}{2}p)$. Les droites donneroient les divers points de la courbe par leurs intersections successives, si leur mouvement étoit assujéti à la condition $QM=FM$. Or en éliminant x et y, on trouve $AP=\frac{1}{2}p+\frac{b}{a}$; de plus. . . . . $QM=AD+AP=p+\frac{b}{a}$; ainsi l'équation de con-

205.* dition entre les variables a et b est $b^2 = p^2 + \frac{2pb}{a}$. En y substituant pour a et b leurs valeurs $\frac{y}{x - \frac{1}{2}p}$ et y tirées des équations des lignes mobiles, il vient pour l'équation cherchée $y^2 = 2px$: ainsi on a une *Parabole*.

206.* IV. On demande la courbe ABO, telle que, pour chaque point M, les distances $MF = z$, $MF' = z'$ à deux points fixes donnés F et F' aient une somme constante $AO = 2a = z + z'$. Prenons C milieu de FF' pour origine; CO, CB pour axes des x et des y; on est assuré d'avance de la symétrie de la courbe de part et d'autre de BC. On doit en général s'attacher à prendre les systêmes des coordonnees les plus convenables afin de parvenir à des équations simples. Soient $FC = c$, x et y les coordonnées de M.

On a FM^2 ou $z^2 = y^2 + (x - c)^2$ et $F'M^2$ ou ..... $z'^2 = y^2 + (c + x)^2$; de plus $z + z' = 2a$. Or si on fait varier M, z et z' changeront, mais a demeurera constant, c'est donc z et z' qu'il faut éliminer entre ces trois équations. En soustrayant les deux premières, il vient $z'^2 - z^2$ ou $(z' + z)(z' - z) = 4cx$, et comme $z' + z = 2a$, on a $z' - z = \frac{2cx}{a}$ et partant $z' = a + \frac{cx}{a}$: ... $z = a - \frac{cx}{a}$: or, en ajoutant les deux valeurs de z^2 et z'^2, on a $z^2 + z'^2 = 2(y^2 + x^2 + c^2)$; donc en substituant $a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + x^2 + c^2$. Il est évident que l'ordonnée à l'origine $BC = b$ est telle que $B'F = a$; donc $c^2 = a^2 - b^2$, et par conséquent la courbe a pour équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$; c'est une ellipse.

207.* V. Si on eût voulu que la différence des lignes $F'M$

et FM fût égale à AO, ou $z' - z = 2a$, le même calcul 207.*
auroit conduit à l'équation $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$ de l'hyperbole, en faisant $c^2 = a^2 + b^2$.

Nous avons ainsi démontré la réciproque des propositions (393, 397, 401) afin de justifier les constructions données à ce sujet, et de développer notre théorie sur des exemples simples.

VI. Etant donnés la droite DN et un point fixe A, 241.*
cherchons la courbe dont chaque point M est tel, que la distance MA est égale à l'ordonnée correspondante PN de la droite DN? Concevons cette courbe comme engendrée par l'intersection continuelle d'une droite PN parallèle à Ay, par un cercle KL dont le centre est fixe en A; le rayon et la droite variant d'ailleurs, de sorte que la condition donnée $AM = PN$ soit toujours remplie.

L'origine étant en A, $AM = \alpha$, $AP = \beta$; les équations du cercle LK et de PN sont

$$x^2 + y^2 = \alpha^2, \qquad x = \beta \ldots \text{(1)}$$

Mais, soient $AD = p$ et t la tangente de l'angle EDA; l'équation de la droite DE qui passe en $D(-p, 0)$, est $y = t(x + p)$: comme on doit avoir $MA = NP$, l'équation de condition est $\alpha = t(\beta + p)$. Lorsque l'on fait varier la droite et le cercle, α et β changent seuls; il faut donc les éliminer à l'aide des équations (1) ce qui donne

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = t(x+p), \text{ ou } y^2 + x^2(1-t^2) - 2t^2px - t^2p^2 = 0.$$

1°. Si $t = 1$, l'angle $E'DA = 50°$; l'équation devient $y^2 = 2px + p^2$, qui est celle d'une parabole $E'S$, dont l'origine est au foyer A, le sommet en S, $2AS = AE' = p$.

2°. Si $t < 1$, l'angle EDA est $< 50°$.; on a une ellipse

241.* dont le centre C a pour abscisse $AC=\frac{pt^2}{1-t^2}$, et les axes sont $a=\frac{tp}{1-t^2}$, $b=\frac{tp}{\sqrt{(1-t^2)}}$.

Il suit de la génération que si DE est parallèle à DA, la courbe est un cercle.

3°. Enfin si $t>1$ ou $EDA>50°$, on a une hyperbole aussi aisée à décrire. Lorsque EDA est droit, l'équation se réduit à $x+p=0$, à cause de $t=\infty$; on a la droite DI même.

Ces courbes touchent toutes la droite donnée DE ou DE', au point E ou E' où elle coupe AE. Cette propriété pourroit servir à la description de ces courbes, et donner un moyen facile d'en tracer le contour.

242.* VII. Imaginons que la ligne AB d'une longueur donnée se meuve dans l'angle BCA, de manière que ses extrémités A et B restent toujours sur les côtés de cet angle ; il s'agit de trouver la courbe décrite par un point déterminé M pris sur cette ligne AB. Soient $a=AM$, $b=MB$, AC, CB les axes (obliques), s le sinus et c le cosinus de l'angle ACB qu'ils forment entre eux ; enfin $PB=z$.

On peut concevoir la courbe comme engendrée par l'intersection de la droite AB, par MP parallèle aux y. Leurs équations sont

$$y=\alpha x+\beta,\quad x=\gamma;$$

Les équations de condition entre les variables α, β et γ, s'obtiennent en remarquant que les côtés de l'angle B coupés par les parallèles AC, MP donnent $az=b\gamma$; de plus, résolvons le triangle MBP, il vient (D, 355) $b^2=z^2+PM^2-2czPM$. Et comme $PM=\alpha\gamma+\beta$, on a

$$az=b\gamma\qquad b^2=z^2+(\alpha\gamma+\beta)^2-2cz(\alpha\gamma+\beta).$$

Pour éliminer z, α, β et γ, mettons x pour γ, et par conséquent y pour $\alpha\gamma+\beta$, il vient $a^2b^2=a^2y^2+b^2x^2-2abcxy$. Ainsi 242. *

$$y=\frac{bcx}{a}\pm\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2s^2)}.$$

On a donc une ellipse dont C est le centre ; la droite CD $\left(y=\frac{bcx}{a}\right)$ est le diamètre ; $CO=b$, $CQ=\frac{a}{s}$, ainsi on connoît les conjugués.

Lorsque l'angle ACB est droit, on a simplement . . . . $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$: l'ellipse est rapportée à son centre et à ses axes : dans ce cas, toute l'analyse ci-dessus se simplifie beaucoup. Voici donc encore un moyen de tracer l'ellipse : d'un point quelconque A de l'axe des y avec un rayon $=a+b=$ la demi-somme des axes (ou des diamètres conjugués), on décrira un arc qui coupera l'axe des x en B, puis on prendra $AM=a$: M sera un des points de la courbe. 242.

Il sera facile de modifier cette analyse pour l'appliquer au cas où le point décrivant M est situé hors de l'angle ACB en M', de sorte que $BM'=b$ et $AM'=a$.

VIII. Si du foyer d'une ellipse on abaisse une perpendiculaire sur toutes les tangentes, quelle est la courbe qui passe par tous les points de rencontre de chaque tangente et de sa perpendiculaire. *

L'équation de la tangente au point (x', y') est connue (404). La droite qui passe par le foyer $(-\alpha, o)$, a pour équation $y=\beta(x+\alpha)$: pour qu'elle soit perpendiculaire à la tangente, il faut (370) que

$\beta=\frac{a^2y'}{b^2x'}$: les équations des génératrices sont donc

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2,\quad b^2x'y=a^2y'(x+\alpha).$$

* Lorsque le point de tangence varie, ces lignes changent de position avec x' et y' : l'équation de condition est celle qui exprime que ce point est sur l'ellipse, ... $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$. Pour éliminer, on tire des premières les valeurs de x' et y', et on les substitue dans celle-ci; il vient

$$b^2y^2+a^2(x+\alpha)^2=\{y^2+x(x+\alpha)\}^2.$$

En développant, on a

$$y^4+y^2(2x(x+\alpha)-b^2)-(x+\alpha)^2(a^2-x^2)=0,$$

or $-b^2=\alpha^2-a^2$, (397) ; le second terme devient donc $y^2((x+\alpha)^2+x^2-a^2)$, de sorte qu'en réunissant les termes affectés de x^2-a^2, on a

$$(y^2+x^2-a^2)\{y^2+(x+\alpha)^2\}=0.$$

Le second facteur donne le foyer ; il est inutile d'y avoir égard ; l'autre donne *le cercle circonscrit à l'ellipse ;* c'est la courbe cherchée.

1°. b n'entre pas ici ; donc le cercle inscrit dans l'hyperbole résout la question proposée pour cette courbe.

2°. Ce cercle est commun à toutes les ellipses décrites sur le même grand axe ; et même au cercle qui se reproduit ainsi lui-même.

3°. Comme $y^2+x^2-a^2=0$, est indépendant de α, on trouve le même cercle en opérant sur l'un et l'autre foyer.

205. * IX. Pour résoudre le même problème pour la parabole, on verra aisément qu'il faut éliminer x' et y' entre

$$yy'=p(x+x'),\ py=-y'(x-\tfrac{1}{2}p),\ y'^2=2px'.$$

Il vient $2py^2=(2y^2+2x^2-px)(p-2x)$, ou en réduisant $x\{4y^2+(2x-p)^2\}=0$. Le second facteur donne le foyer, il faut le supprimer : le premier, ou

$x = 0$, donne l'axe des y ; c'est le lieu des pieds des perpendiculaires. *Voy.* le point i, fig. 205. *

X. La parabole NAK étant donnée, trouver le lieu de tous les points M tels qu'en menant les deux tangentes NM et KM, l'angle qu'elles formeront soit toujours égal à un angle donné. 243. *

Les tangentes à la parabole aux points (x', y'), (x'', y'') ont pour équations (411)

$$yy' = p(x + x') \quad yy'' = p(x + x'').$$

L'angle KMN que forment entre elles ces droites a pour tangente $t = \dfrac{a' - a''}{1 + a'a''}$ en faisant $a' = \dfrac{p}{y'}$, $a'' = \dfrac{p}{y''}$. Lorsqu'on change les points K et N de contact, cet angle doit rester le même ; t est constant, mais $x'\ y'\ x''\ y''$ varient ; il faut les éliminer, et on a pour cela, outre les deux équations précédentes, les trois suivantes

$$t = \frac{p(y'' - y')}{y'y'' + p^2}, \quad y'^2 = 2px', \quad y''^2 = 2px''.$$

$x' = \dfrac{y'^2}{2p}$, $x'' = \dfrac{y''^2}{2p}$, changent les deux 1res. en $y'^2 - 2yy' + 2px = 0$, $y''^2 - 2yy'' + 2px = 0$; ainsi des deux racines de la 1re. de ces équations, l'une est y' et l'autre y'' ; donc $y'y'' = 2px$, d'où $t = \dfrac{y'' - y'}{2x + p}$: de plus $y'' - y' = \pm 2\sqrt{(y^2 - 2px)}$; ainsi

$$y^2 - t^2x^2 - px(2 + t^2) - \tfrac{1}{4}t^2p^2 = 0,$$

est l'équation cherchée : c'est celle d'une hyperbole ; et comme t n'entre qu'au carré, l'une des branches est décrite par le sommet M' de l'angle obtus $K'M'N'$, et l'autre par celui M de son supplément NMK. On prendra

243.* $AC = \frac{p}{t^2} + \frac{1}{2}p$; C sera le centre; en y transportant l'origine, on a $t^2y^2 - t^4x^2 = -p^2(1 + t^2)$; ainsi, les axes sont $a = \frac{p}{ts}$, $b = \frac{p}{s}$, en désignant par s le sinus de l'angle donné.

Si l'angle donné étoit droit ou $t = \infty$, on auroit la directrice; en sorte que si de chaque point de cette droite, on mène deux tangentes à la parabole, elles font toujours entre elles un angle droit. *Voy.* IX.

Au reste, il arrive souvent que l'équation même de la courbe est donnée, ou presqu'exprimée dans sa définition, plutôt que par sa génération: ceci mérite à peine de nous arrêter. En voici un exemple.

* XI. Quelle est la courbe dont chaque ordonnée est moyenne proportionnelle entre celles de deux droites données correspondantes à la même abscisse? Il est clair que $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ étant les équations des droites, celle de la courbe est donnée par

$$y^2 = (ax + b)(a'x + b') \text{ ou } y^2 - aa'x^2 - x(a'b + ab') = bb'$$

1°. Si l'une des droites est parallèle aux x, $a' = 0$ donne $y^2 = ab'x + bb'$ qui appartient à une parabole qu'on décrira aisément. Cependant si $a = 0$, $y^2 = bb'$ donne deux droites parallèles, une droite ou rien, suivant les grandeurs et les signes de b et b'. Si on fait abstraction du signe des ordonnées des droites, outre notre parabole, on en a encore une seconde égale et opposée.

2°. Si a et a' sont de signes contraires, on a une ellipse; et si $aa' = -1$, c.-à-d., si les lignes données sont perpendiculaires, on a un cercle (on a aussi un point ou rien).

3°. Enfin si a et a' sont de mêmes signes, on a une

hyperbole ; si $a = a'$ l'une des asymptotes est parallèle *
aux droites données, d'où on peut conclure l'autre.

On peut aussi avoir deux droites qui se croisent.

Dans ces deux derniers cas, en faisant abstraction des signes des ordonnées, on a à la fois l'ellipse et l'hyperbole décrites sur les mêmes axes, comme fig. 218.

On pourroit varier beaucoup ces problèmes : M. Puissant en a mis plusieurs dans son *Recueil de diverses propositions de Géométrie*. En voici quelques autres.

XII. Deux angles de 50°, BAC, BDC, étant donnés 244. *
de position, les faire tourner autour de leurs sommets fixes A et D, de sorte que deux côtés AB, BD se coupent toujours sur BE parallèle à AD. Quelle est la courbe décrite par le point C d'intersection des deux autres côtés AC, DC?

On peut prendre les angles mobiles quelconques, ainsi que la droite BE.

XIII. Soit un point M, tel que ses distances AM, BM 245. *
à deux points fixes A et B soient entre elles dans un rapport donné ; quelle est la courbe dont tous les points jouissent de cette propriété?

En quel lieu de cette courbe AM sera-t-elle tangente? Comment déterminer le point M, tel que les distances MA, MB, MD à trois points fixes A, B et D aient entre elles des rapports donnés?

XIV. Un cercle et une droite étant donnés, trouver le *
lieu de tous les centres des cercles tangens à l'un et à l'autre. Le même problème pour deux cercles donnés.

XV. Les côtés d'un angle droit glissent sur une ellipse *
ou une hyperbole à laquelle ils demeurent sans cesse tangens ; quelle est la courbe décrite par le sommet?

On peut prendre aussi l'angle quelconque, comme au problème X.

2. *Problêmes déterminés et indéterminés qui passent le second degré.*

* 461. Lorsqu'on est conduit par la résolution d'un problème déterminé à une équation où l'inconnue est élevée au-delà du second degré, voici comment on en construit les racines. Soit par exemple :

$$x^4 - pqx^2 + p^2rx + p^2m^2 = 0.$$

Si on fait $x^2 = py$, on a $y^2 - qy + rx + m^2 = 0$, de sorte que la proposée provient de l'élimination de y entre celles-ci ; si donc on construit les sections coniques qui s'y rapportent, les abscisses des points d'intersection seront les racines cherchées. La proposée aura ses quatre racines réelles, quand les deux courbes se couperont en quatre points ; il n'y aura que deux points d'intersection, s'il n'y a que deux racines réelles : elles seront toutes quatre imaginaires s'il n'y a aucun point commun entre les courbes. Au cas qu'il y eût quelques racines égales, les deux courbes se toucheroient, etc.

Mais comme l'une des deux courbes est arbitraire, il convient toujours d'employer le cercle, comme plus aisé
246. à décrire. Soit donc $xy = pm$; la proposée devient. . .
$x^2 + y^2 + \frac{pry}{m} = pq$; après avoir tracé les deux axes rectangles Ax, Ay, on décrira l'hyperbole $xy = pm$ entre ses asymptotes ; puis prenant $AC = \frac{pr}{2m}$, on tracera du centre C avec le rayon $\sqrt{(pq + AC^2)}$ un cercle qui coupera l'hyperbole en $MM'NN'$; les abscisses AP, AP', AQ, AQ' seront les racines cherchées ; deux sont ici positives, les deux autres négatives. Il pourroit n'y avoir aucun point d'intersection ou seulement deux.

De même pour $x^4 - p^2x^2 + p^2qx + p^3r = 0$, on prendra $x^2 = py$, d'où $y^2 - py + qx + pr = 0$; ajoutant $x^2 - py = 0$, il vient *

$$y^2 + x^2 - 2py + qx + pr = 0\,,\quad x^2 = py.$$

Ces équations appartiennent à un cercle et à une parabole qu'il sera facile de décrire.

Pour $x^3 \pm p^2x - p^2q = 0$, on multipliera par x, et on fera $x^2 = py$; d'où $y^2 \pm py - qx = 0$; ajoutant la précédente, il vient

$$y^2 + x^2 = qx \text{ ou } y^2 + x^2 = 2py + qx$$

suivant que la proposée contient $+p^2$ ou $-p^2$. On construit la parabole et le cercle que ces équations représentent ; les abscisses des points communs sont les racines cherchées ; $x = 0$ répond à la racine introduite.

Par exemple $x^3 - 3b^2x = 2b^3$; soit MA la parabole dont l'équation est $x^2 = by$; soit aussi $C(b,\ 2b)$ le centre, et $AC = b\sqrt{5}$ le rayon du cercle MPA, le point M d'intersection a pour abscisse $x = AP$, c'est la seule racine réelle. 247.

462. Etant données deux droites a et b, trouver deux moyennes proportionnelles, de sorte que $\div a : x : y : b$. *
Puisque $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, en construisant deux paraboles, dont a et b soient les paramètres, qui aient l'origine pour sommet commun, et dont les axes se confondent respectivement avec ceux des y et des x, on aura pour l'abscisse x et l'ordonnée y de leur point commun les lignes demandées.

Mais on peut simplifier beaucoup les constructions en employant le cercle. Ajoutons nos équations, il vient $x^2 + y^2 - ay - bx = 0$, et on retombe sur la construction précédente, où $BC = \frac{1}{2}a$, $AB = \frac{1}{2}b$. 247.

247. Lorsque $b = 2a$, on a $x^3 = 2a^3$, ce qui résout bien simplement le problême de *la duplication du cube;* et même si on fait $b = \frac{m}{n} a$, comme on a $x^3 = \frac{m}{n} a^3$, on peut aussi former un cube x^3 qui soit à un cube donné a^3 :: $m : n$.

* En général les constructions peuvent être variées de bien des manières; car puisqu'elles dépendent de deux courbes dont on a les équations, en les multipliant par des indéterminées et les ajoutant, on obtient différentes courbes propres à la résolution du problême.

* 463. Au reste, il peut arriver qu'une question proposée comme déterminée ne le soit pas, ou même qu'on puisse en faciliter la solution lorsqu'elle est déterminée, en la faisant dépendre d'une autre question qui ne le soit pas. L'analyse indique d'elle-même ces modifications; c'est ce qui va être éclairci par les questions suivantes.

248. * I. Etant donnés deux points A et B, trouver un troisième point M tel qu'en menant AM et MB l'angle MAB soit la moitié de MBA. Faisons $AB = m$; les équations de AM MB sont $y = ax$, $y = -a'(x-m)$, l'origine étant en A : or a et a' sont des tangentes d'angles doubles l'un de l'autre, donc $a' = \frac{2a}{1-a^2}$, (L, 359). Eliminons a et a' entre ces trois équations (et faisons abstraction de $y = 0$ qui n'apprend rien), nous aurons

$$y^2 - 3x^2 + 2mx = 0.$$

On voit donc que la question est indéterminée, et qu'on y satisfait en prenant pour M chaque point de la courbe dont nous venons d'obtenir l'équation. On fera . . . . $AC = \frac{1}{3} m = \frac{1}{3} AB$, C sera le centre de l'hyperbole MD (les asymptotes CG, CH sont faciles à tracer,

puisqu'elles font avec AB un angle égal aux deux tiers 53. *
d'un droit, $\sqrt{3}$ en étant la tangente. *V.* n°. 352), cette courbe sera celle dont il s'agit.

Si on veut partager un arc AEB (ou un angle AKB) en trois parties égales, on prendra le tiers AC de sa corde AB', C sera le centre, A et D seront les sommets de l'hyperbole ci-dessus, dont l'intersection avec l'arc donnera (207) le tiers EB de l'arc (ou le tiers EKB de l'angle).

On remarquera que pour résoudre le problême de la *trisection de l'angle*, nous l'avons d'abord présenté sous une forme indéterminée et même plus générale, puisque nous aurions pu de même trouver le tiers d'un arc d'ellipse ou de toute autre courbe. Du reste, les problêmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle sont célèbres dans l'histoire des mathématiques. *Voy.* l'ouvrage de *Montucla.*

II. Mener une droite DD' de manière que la somme 249. *
des perpendiculaires MD, $M'D'$, abaissées de deux points donnés M et M', soit égale à une longueur connue $=m$. Soit $y=ax+b$ l'équation de la droite DD', il s'agit de déterminer a et b par la condition $MD+M'D'=m$.

La distance du point M (x', y') à cette ligne (374) est $\dfrac{ax'-y'+b}{\sqrt{(1+a^2)}}$; en raisonnant de même pour M' (x'', y'') on a

$$(ax'-y'+b)+(ax''-y''+b)=m\sqrt{(1+a^2)}\ldots(1)$$

Or cette équation ne pouvant faire connoître que a ou b, le problême est indéterminé : si donc on élimine b de $y=ax+b$ en mettant $y-ax$ pour b dans (1), on a $y-\frac{1}{2}(y'+y'')=a\,(x-\frac{1}{2}(x'+x''))+\frac{1}{2}m\sqrt{(1+a^2)}$; c'est l'équation de la droite cherchée. Transportons l'ori-

249.* gine au milieu de MM' en $C\left(\frac{1}{2}(x'+x''), \frac{1}{2}(y'+y'')\right)$, on a simplement

$$y = ax + \tfrac{1}{2} m \sqrt{(1+a^2)} \ldots \ldots (2)$$

La direction de la droite est restée arbitraire; seulement on voit que lorsqu'on l'a choisie à volonté, l'ordonnée à l'origine est $\frac{1}{2} m \sqrt{(1+a^2)}$; ainsi (374) la distance $FC = \frac{1}{2} m$, ce qui fournit cette construction. Du centre C des moyennes distances aux axes, on décrira un cercle avec le rayon $\frac{1}{2} m$; toute tangente à ce cercle satisfera seule à la condition exigée. C'est ce que rend évident la propriété connue du trapèze $MDD'M'$ (216, 5°.).

On remarquera que si on eût donné trois points, il auroit suffi d'ajouter au premier membre de (1) un terme de la forme $ax''' - y''' + b$: en général, pour n points la même chose a lieu; de sorte qu'en remplaçant simplement m dans (2) par $\frac{m}{n}$, on aura pour solution de ce dernier problême toutes les tangentes au cercle décrit du centre des moyennes distances avec le rayon $\frac{m}{n}$.

250.* III. Etant données deux droites AP, AD cherchons un point M tel que les perpendiculaires MP, MD soient entre elles dans un rapport donné $= n : m$. Prenons AP pour axe des x, A pour origine; $AP = x'$, $PM = y'$; enfin $y = ax$ pour l'équation de AD. La perpendiculaire $MD = \frac{y' - ax'}{\sqrt{(1+a^2)}}$, (374) : ainsi par condition on a

$$\frac{y' - ax'}{y' \sqrt{(1+a^2)}} = \frac{m}{n}$$

d'où
$$y' = \frac{anx'}{n - m\sqrt{(1+a^2)}}$$

Donc tous les points d'une droite AM satisfont à la

question. Pour la tracer, prenons des parties $AC = m$, 250. *
$AB = n$ sur les perpendiculaires aux droites données, et menons des parallèles BM CM à ces droites, M sera l'un des points de la ligne cherchée, puisqu'il satisfait visiblement à la condition : cette ligne est donc AM.

Si on vouloit obtenir sur une courbe MN les points M et N qui jouissent de la propriété désignée ; il faudroit construire la ligne AM, et prendre ses points d'intersection M et N avec la courbe.

Si le point M devoit être situé au dessous de AD, $\sqrt{(1 + a^2)}$ auroit un signe contraire, il faudroit prendre $AC' = m$ en sens opposé de AC; et on auroit une 2e. solution à la rencontre de BM avec $C'x$.

IV. Il pourroit arriver qu'au contraire le problème fût *
présenté comme indéterminé quoiqu'il ne le fût pas : c'est ce qu'on a déjà vu (454, 2°.) lorsque l'équation du second a donné un point unique. Voici un exemple de cette nature.

D'un point K menons deux tangentes KM, KN à 251.
l'ellipse donnée CMN, et la corde MN qui joint les points de contact. Si on fait parcourir au point K une droite quelconque AB donnée, les points M, N varieront ainsi que MN; on demande la courbe qui est le lieu des intersections successives de ces cordes MN.

Menons par le centre C, CD parallèle à AB, et CA diamètre conjugué de CD; prenons ces lignes pour axes; faisons $CA = \alpha$, $AK = \beta$; les droites AB, KM et l'ellipse ont pour équations

$$x = \alpha,\ y - \beta = A(x - \alpha),\ a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Eliminons y entre les deux dernières, afin d'obtenir les points de rencontre de l'ellipse avec la droite KM qui jusqu'ici est une sécante quelconque ; il vient

$$x^2(a^2A^2+b^2)-2a^2Ax(A\alpha-\beta)+a^2\{(A\alpha-\beta)^2-b^2\}=0 \ldots (1)$$

251. Pour que KM soit tangente, il faut qu'on ait (423)

$$a^2A^2(A\alpha-\beta)^2-\{(A\alpha-\beta)^2-b^2\}(a^2A^2+b^2)=0 \text{ et } x=\frac{a^2A(A\alpha-\beta)}{a^2A^2+b^2},$$

ou plutôt

$$a^2A^2+b^2=(A\alpha-\beta)^2 \text{ et } x=\frac{Aa^2}{A\alpha-\beta}.$$

De $y=\beta+A(x-\alpha)$, on tire $y=\dfrac{a^2A^2-(A\alpha-\beta)^2}{A\alpha-\beta}=\dfrac{-b^2}{A\alpha-\beta}$

A a deux valeurs qu'on pourroit tirer de notre relation ; en les désignant par A et A' ; on a pour les coordonnées des deux points M et N de contact

$$x=\frac{Aa^2}{A\alpha-\beta},\ y=\frac{-b^2}{A\alpha-\beta}$$

$$x'=\frac{A'a^2}{A'\alpha-\beta},\ y'=\frac{-b^2}{A'\alpha-\beta}.$$

La corde MN qui passe par deux points connus a pour équation (369), toute réduction faite, $y=-\dfrac{b^2\alpha x}{a^2\beta}+\dfrac{b^2}{\beta}$.
A et A' n'entrant pas dans ce résultat, pour un autre point K, tel qu'en B, il suffira de changer ici β en $AB=\beta'$; la corde mn a donc pour équation . . . . $y=-\dfrac{b^2\alpha x}{a^2\beta'}+\dfrac{b^2}{\beta'}$. En éliminant, on obtient pour le concours des deux cordes $x=\dfrac{a^2}{\alpha}$, $y=0$; or ces valeurs sont indépendantes de β, β' et b : donc, 1°. le point d'intersection est constamment le même ; 2°. il ne change pas lorsque l'ellipse a un autre second diamètre, leurs directions restant les mêmes ; 3°. il est situé sur le

premier diamètre ; 4°. cette propriété est également vraie pour l'hyperbole.

On pourra par le même procédé s'assurer que dans la parabole la même chose a lieu.

3. *De quelques autres Courbes.*

464. Les anciens ne connoissoient qu'un petit nombre de courbes ; mais depuis que Descartes a appliqué l'algèbre aux spéculations géométriques, on a vu que toute équation en x et y représente une ligne. Outre ces courbes, il y a encore celles qu'on trace au hasard, et celles qui ne peuvent être exprimées par une équation finie, ainsi que l'apprend le calcul intégral. *

Du reste, lorqu'on a divers points F, G, M, Z.... il y a une infinité de courbes qui les unissent ; cependant parmi celles qu'on peut choisir presque à volonté, il en est une qu'on préfère, comme étant plus simple que les autres, c'est celle dont l'équation a la forme .... $y = A + Bx + Cx^2 +$, etc., et qu'on nomme *Parabole* par analogie avec la courbe que nous connoissons sous ce nom. Après avoir tracé deux axes Ax, Ay, et marqué les coordonnées AD, DF, AC, CG,.... des points connus, on comprendra dans l'équation autant de termes qu'il y a de ces points, et il s'agira d'en déterminer les coefficiens A, B,..... par les conditions données ; savoir, que $x = AD = \alpha$, donne $y = DF = a$, et ainsi des autres. 183.

Pour cela comme $x = \alpha$ répond à $y = a$, on a ... $a = A + B\alpha + C\alpha^2 + ...$; de même $x = \beta$, donne $y = b$; ainsi $b = A + Bb + Cb^2 +$,.... etc. Il faudra ensuite éliminer les inconnues A, B, C,... afin d'en obtenir les valeurs.

Ce calcul peut être présenté d'une manière simple et générale ; car puisque $x = \alpha$, doit donner $y = a$, la

183.* valeur de y doit avoir la forme $y = Aa + K$, A et K étant composés en x, de manière que $x = \alpha$ rende $A = 1$ et $K = 0$; ainsi (491) $K = (x - \alpha)\,K'$. De plus quand $x = \beta$, on a $y = b$; donc on a en général $y = Bb + L$, L étant $= (x - \beta)\,L'$; de sorte que pour allier ces deux conditions $y = \frac{x - \beta}{\alpha - \beta}\,A'a + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}\,B'b + M$; A' et B' étant $= 1$ lorsqu'on fait respectivement $x = \alpha$, ou $= \beta$; et M étant $= (x - \alpha)\,(x - \beta)\,M'$. En continuant le même raisonnement on verra que

$$y = Aa + Bb + Cc + \text{etc.}$$

$$A = \frac{(x - \beta)\,(x - \gamma)\,(x - \delta)\ldots}{(\alpha - \beta)\,(\alpha - \gamma)\,(\alpha - \delta)\ldots}\,;$$

$$B = \frac{(x - \alpha)\,(x - \gamma)\,(x - \delta)\ldots}{(\beta - \alpha)\,(\beta - \gamma)\,(\beta - \delta)\ldots}\,; \text{ etc.}$$

En prenant pour chaque terme de ces fractions autant de facteurs moins un, qu'il y a de points donnés.

On pourra donc obtenir ainsi l'équation approchée d'une courbe donnée, mais tracée au hasard ; il suffira de distinguer un nombre suffisant de points, pris sur-tout aux lieux où la courbe offre des sinuosités marquées.

On pourra aussi trouver, entre des points isolés $F, G, M, Z\ldots$, d'autres points assujétis à la même loi : et de même entre plusieurs quantités liées par de certains rapports, obtenir une loi qui puisse servir à faire connoître par approximation quelque circonstance intermédiaire. C'est en quoi consiste *la méthode d'Interpolation* dont l'application est si fréquente aux phénomènes naturels.

* 465. Les mêmes raisonnemens servent à faire passer une courbe de nature connue par une série de points donnés : l'équation de cette courbe doit alors renfermer autant de

constantes arbitraires qu'il y a de ces points, sans quoi le *
problème seroit absurde ou indéterminé. Ainsi, l'équation la plus générale du cercle étant $(y-k)^2+(x-h)^2=r^2$, on ne peut exiger que cette courbe passe par plus de trois points connus (α, a) $(\beta, b)(\gamma, c)$; et on auroit pour déterminer les constantes k, h et r, les conditions

$$(a-k)^2+(\alpha-h)^2=r^2,\ (b-k)^2+(\beta-h)^2=r^2,\ (c-k)^2+(\gamma-h)^2=r^2,$$

en conservant les désignations ci-dessus.

Si le rayon r étoit connu; on ne pourroit plus se donner que deux points, et ainsi de suite.

En général, on peut faire passer une section conique par cinq points, puisqu'il y a cinq arbitraires dans l'équation générale du second degré dégagée du coefficient du premier terme.

466. Par un point fixe B, menons une ligne BQM qui 252. *
coupe en C une droite donnée Ax : puis prenons . . . $CM = CQ =$ à une quantité donnée; quelle est l'équation de la courbe dont tous les points M, Q sont déterminés par le même procédé? Elle a été découverte par *Nicomède* qui l'a nommée *Conchoïde*.

La conchoïde résulte donc de l'intersection continuelle de la ligne BM qui tourne autour de B, par un cercle MEQ qu'on fait glisser le long de AC, de manière que son centre soit toujours sur BM. Prenons Ax et BD pour axes : soient $AC = \alpha$, $AB = b$, $CM = AD = a$; enfin A la tangente de l'angle MCx; les équations de BM et du cercle sont

$$y = Ax - b, \quad (x-\alpha)^2 + y^2 = a^2$$

mais le pied C de BM a pour abscisse α; donc $0 = A\alpha - b$: éliminons α et A, il vient

$$\left(\frac{xy}{y+b}\right)^2 = a^2 - y^2,$$

252. * pour l'équation de la conchoïde. Du reste, il suit de sa génération, qu'elle est formée de deux branches, l'une en dessus, l'autre en dessous de Ax, étendues à l'infini, et dont Ax est l'asymptote ; que la plus grande largeur est en DD', lorsque la droite mobile BM est perpendiculaire à Ax. Si AB est $< b$, alors il y a en D' un nœud, qui s'évanouit et ne laisse qu'un point de rebroussement, lorsque $AB = a$; voyez la figure 253.

254. * 467. Soit le cercle AFB donné, et sa tangente BD : si, après avoir mené, de l'extrémité A du diamètre $AB = 2a$, des droites AD aux divers points D de la tangente, on prend $AM = FD$, quelle est l'équation de la courbe MAM' qui joint tous les points M ainsi déterminés ? Elle résulte de l'intersection continuelle d'une droite AD, mobile autour de A, par un cercle dont le centre est en A, et dont le rayon R varie avec son égal FD. Les équations de ces deux lignes sont $y = Ax$, $x^2 + y^2 = R^2$, l'origine étant en A ; AB l'axe des x. L'équation du cercle AFB étant $y^2 = 2ax - x^2$, on trouve aisément (372) $AE = \frac{2a}{1 + A^2}$, d'où $EB = \frac{2aA^2}{1 + A^2}$; mais (354). . .

$AP = R.\cos MAP = \frac{R}{\sqrt{(1 + A^2)}}$: ainsi $AM = FD$ ou $AP = EB$ donne la condition $R\sqrt{(1 + A^2)} = 2aA^2$. Eliminant R et A, à l'aide de $x^2 + y^2 = R^2, y = Ax$, on a l'équation cherchée

$$x^3 + xy^2 = 2ay^2, \text{ d'où } y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

Il résulte de cette équation, que 1°. x ne peut être $> 2a$, ni négatif ; ainsi la courbe est renfermée entre Ay et BD ; 2°. elle est symétrique de part et d'autre de AB ; 3°. elle passe par l'origine A (où elle a un rebroussement) ;

4°. $x=a$ donne $y=\pm a$, les points H et H' où la courbe coupe la circonférence directrice, partagent celle-ci en ses quatre quadrans; 5°. $x=2a$ donne $y=\infty$; BD est asymptote. 264. *

Cette courbe est nommée *Cissoïde de Dioclès*. On s'en est servi autrefois, ainsi que de la conchoïde, pour résoudre le problême de la duplication du cube.

468. La courbe OBM dont les abscisses AE, AP,.... sont les logarithmes des ordonnées correspondantes EF, MP,..... est nommée *Logarithmique :* son équation est $x=\log. y$, ou $y=a^x$, a étant la *Base* (149). Il est facile de voir que 1°. la courbe n'a qu'une seule branche, qui est infinie de part et d'autre : 2°. l'ordonnée AB à l'origine est $=1$; 3°. soit $AE=1=AB$, on a $EF=a=$ la base : 4°. si a est >1, la partie BM de la courbe qui est dans la région des x positifs, s'écarte sans cesse de Ax ; l'autre partie BO, s'approche sans cesse de AQ; QAx est l'asymptote. Le contraire a lieu lorsque a est <1. 5°. Si on prend des abscisses successives en progression par différence, les ordonnées correspondantes formeront une progression par quotient. 255. *

Les différentes espèces de logarithmiques sont distinguées entre elles par la base a.

469. Formons *la courbe des sinus*; l'équation est $y=\sin x$. Chaque abscisse x est le développement d'un arc de cercle dont l'ordonnée y est le sinus, le rayon étant r. Si l'arc est 0, πr, $2\pi r$,.... le sinus est nul : à partir de l'origine A, et de part et d'autre, si on prend $AB=BC=AB'=....=\pi r$, les points $A\,B\,B'\;C\,C'$.... seront ceux où la courbe coupe l'axe des x. L'arc croissant depuis zéro, jusqu'à $\frac{1}{2}\pi r=AE$, le sinus croît aussi jusqu'à $EF=r$: mais x continuant de croître, y diminue; la portion AFB de courbe est symétrique par rapport à FE. Lorsque x 256. *

250.* passe $AB = \pi r$, le sinus devient negatif, et comme il reprend les mêmes valeurs, on a une autre partie de courbe BDC égale à la première.

Le cours se continue ainsi à l'infini. Ces courbes ne diffèrent entre elles que par le rayon r.

257.* 470. Ayant tracé deux axes rectangulaires Cx, Cy, on demande la courbe qui résulte de l'intersection continuelle des droites PM CM, en supposant que PM se meuve parallèlement à Cy, tandis que CM tourne autour de C : de plus, lorsque PM passe en A, AC étant donné, CM doit être couché sur Cx; PM et CM doivent arriver ensemble à se confondre avec Cy; enfin l'espace AP et l'arc ab décrits, sont toujours dans le rapport de AC à ac.

Soient $AC = a$, $ab = \theta$, $CP = \alpha$, les équations de CM et PM sont $y = x \text{ tang } \theta$, $x = \alpha$. Mais la condition $\frac{AP}{AC} = \frac{ab}{ac}$ donne $\frac{a - \alpha}{a} = \frac{\theta}{\frac{1}{2}\pi}$; éliminons α et θ, il vient

$$y = x \text{ tang} \left\{ \frac{\frac{1}{2}\pi (a - x)}{a} \right\}, \text{ ou } y = x \cot \left(\frac{\pi x}{2a} \right).$$

Il est aisé de voir que 1°. la courbe est symétrique de part et d'autre de Cy; 2°. que $\pm x > a$ rend y négatif; 3°. que $\pm x = 2a$ donne les droites QN, $Q'N$ asymptotes; $x = 0$ rend $x = \frac{0}{0}$; ce n'est pas ici (V. 673) le lieu de fixer la valeur de ce symbole, ni de développer les propriétés de notre courbe, qui lui ont fait donner par *Dinostrate* son inventeur, le nom de *Quadratrice*, à cause de l'utilité qu'il lui supposa pour la quadrature du cercle.

258.* 471. Si un cercle CM roule sur une droite AB, le point M qui originairement étoit en contact en A, aura décrit la courbe AM; et le nouveau point de tangence

avec AB sera en D, de sorte que AD sera le déve- 238.*
loppement de l'arc de cercle MD. En continuant le mouvement du cercle, le point M tracera la courbe $AMFB$ qu'on nomme *Cycloïde*, *Roulette* ou *Trochoïde*.

Après une révolution complète, le point M se retrouvera au contact en B, qui sera un point de la courbe, AB étant la circonférence du cercle générateur : en E milieu de AB, le diamètre $FE = 2r$ de ce cercle sera la plus grande ordonnée, et la courbe sera symétrique de part et d'autre de l'*axe* FE. La cycloïde continue son cours à l'infini, en formant en A, B, ... des rebroussemens. Toutes ces circonstances sont faciles à prévoir ; mais elles se voient très-bien sur l'équation.

Prenons l'origine en A, $AP = x$, $PM = y$; comme $AP = AD - PD$, on a $x = MD - z$, en faisant. . . . $PD = MQ = z$; z est l'ordonné edu cercle CM, l'abscisse y étant DQ, d'où $z^2 = 2ry - y^2$. Or MD est un arc qui, dans le cercle dont le rayon est r, a z pour sinus ; ce qu'on exprime ainsi $MD = \text{arc}\ (\sin = z)$, donc on a

$$x = \text{arc}\ (\sin = z) - z \text{ ou } z = \sin\ (x + z)\,;\ z^2 = 2ry - y^2.$$

Si l'origine est en F, $FS = x$, $SM = y$, $FK = u$, on a

$$x = \text{arc}\ (\sin = z) + z \text{ ou } z = \sin\ (x - z)\,;\ \text{ou } x = u + \sin u.$$

Les travaux de Paschal, Huyghens, Bernoulli . . . ont rendu cette courbe célèbre; elle jouit de propriétés géométriques et mécaniques très-singulières; mais ce n'est pas ici le lieu de nous en occuper.

Si on eût cherché la courbe décrite par un point du plan circulaire différent de ceux de la circonférence, on auroit eu une autre espèce de cycloïde. On auroit aussi pu donner au cercle mobile un mouvement de

256.* translation dans l'un ou l'autre sens, outre ce... dont nous venons de parler, ce qui auroit alongé ou accourci la cycloïde; enfin, on auroit pu faire rouler la circonférence sur une autre courbe, on auroit eu ce qu'on nomme des *Epicycloïdes*. Mais nous ne pouvons qu'indiquer ces objets.

* 472. On nomme *Spirale*, une courbe qui est coupée en une infinité de points par toute ligne qui passe par un point fixe ou pôle. Les spirales forment un genre de courbes dont la génération nécessite, pour ainsi dire, les coordonnées polaires. Telle est celle de *Cônon*, qui porte le nom de *spirale d'Archimède*, parce que ce célèbre géomètre en a le premier reconnu les pro-
259. priétés. La droite AI tourne autour de A, pendant qu'un point mobile M glisse le long de AI; cherchons l'équation de la courbe $AMNC$ qu'il trace. On suppose que AI est placé en AC, quand le mobile est en A, qu'après une révolution, lorsque AI se retrouve en AC, le mobile M est en C; qu'enfin les espaces qu'il parcourt sont proportionnels aux angles que décrit AI.

La valeur angulaire 2π devant répondre à $AC = a$, on a $\frac{2\pi}{a} = \frac{gh}{AM} = \frac{\theta}{r}$; donc $2\pi r = a\theta$ est l'équation cherchée. La courbe passe en A, en C,.... les révolutions successives de AI, donnent $\theta = 2\pi, = 4\pi$,.... d'où $r = a, = 2a$, ... de sorte que chaque fois le rayon vecteur augmente de a. Comme pour un nombre quelconque k de révolutions, l'équation

$$r = \frac{a\theta}{2\pi} \text{ devient } r = ak + \frac{a\theta}{2\pi},$$

k étant un entier quelconque, les rayons vecteurs s'accroissent aussi de a.

47 Soient menées les perpendiculaires AC, CD, et décri u centre C des arcs, tels que PM égaux en longueur à une ligne donnée $CD = a$; les extrémités M de ces arcs déterminent une courbe NM, dont on trouve aisément l'équation; car on a $\frac{Ch}{gh} = \frac{CM}{PM}$; or .... $PM = a$, donc $r\theta = a$. L'analogie de cette équation avec $xy = m^2$ a fait donner à cette courbe le nom de *Spirale hyberbolique* : on voit d'ailleurs que DE parallèle à AC est asymptote. Puisque $r = \frac{a}{\theta}$, r n'est nul que quand $\theta = \infty$; et comme $\theta = 2\pi, = 4\pi, \ldots$ donne des valeurs de r de plus en plus petites, on voit que la courbe fait autour du pôle des révolutions, et qu'elle n'y parvient qu'après une infinité de tours. 260. *

474. On a donné de même le nom de *Spirale logarithmique* à la courbe dont l'équation est *

$$\theta = \log r \text{ ou } r = a^\theta:$$

θ croissant, r croît aussi et le cours de la spirale s'étend à l'infini; mais θ étant négatif et croissant, r décroît, de sorte que ce n'est qu'après un nombre infini de tours que la courbe atteint le pôle. Elle participe comme on voit des deux précédentes.

475. La *Spirale parabolique* a pour équation ..... $r = a \pm \sqrt{(p\theta)}$, de sorte que $r - a$ est moyenne proportionnelle entre p et θ : on reconnoîtra aisément la forme de cette courbe. *

Fin du tome premier.

ERRATA.

Page 57, ligne 5; par, *lisez*, pour

53, 8 en remontant, *mettez* (un liard par franc) avant et on aura

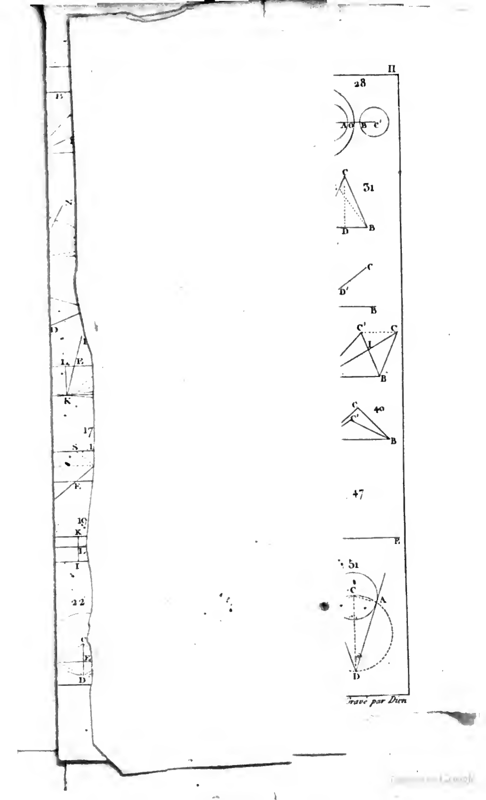
143, 12; *ôtez* n°. 91.

269, 2; sont données, *ajoutez*, de grandeur et de position

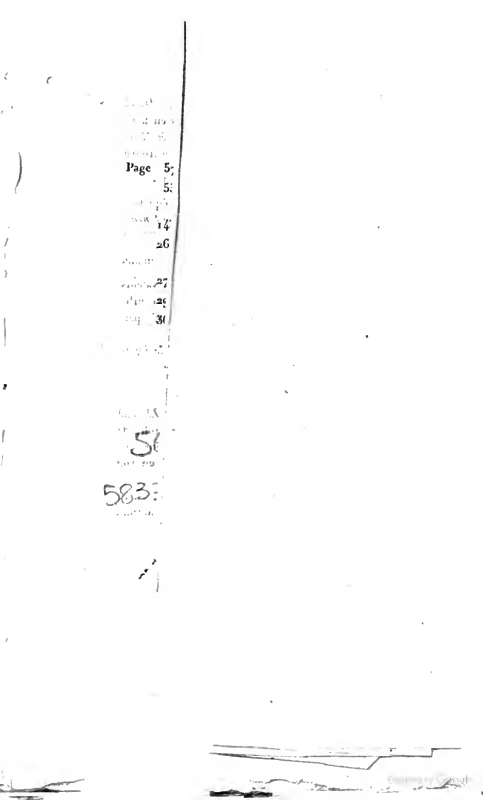
272, 12; le tronc, *lisez*, l'aire du tronc

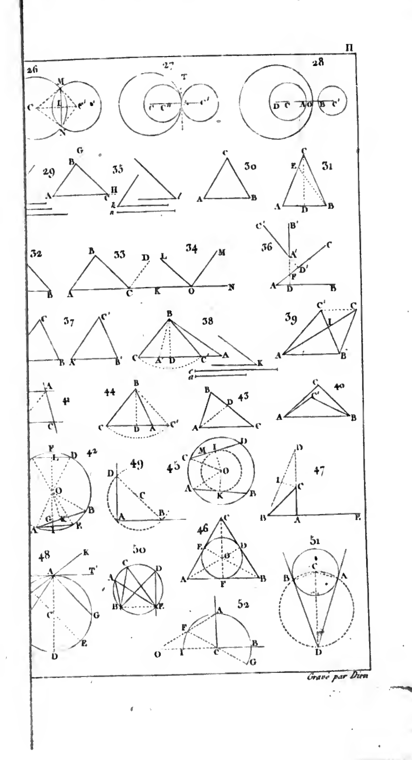
290, 15; Donc, *lisez*, mais

366, mettez (*D*) au lieu de (*C*) aux équations du bas de la page.

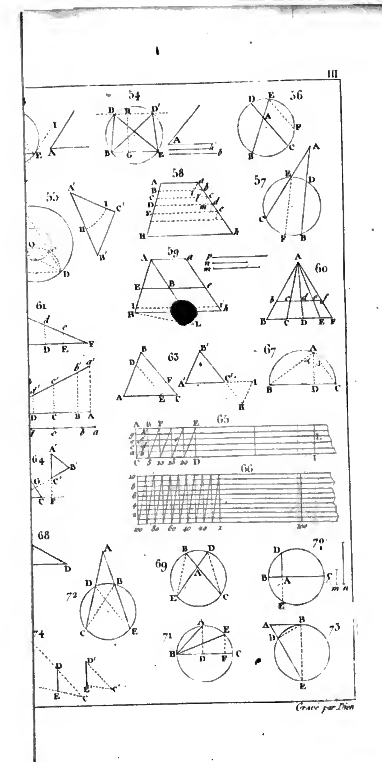


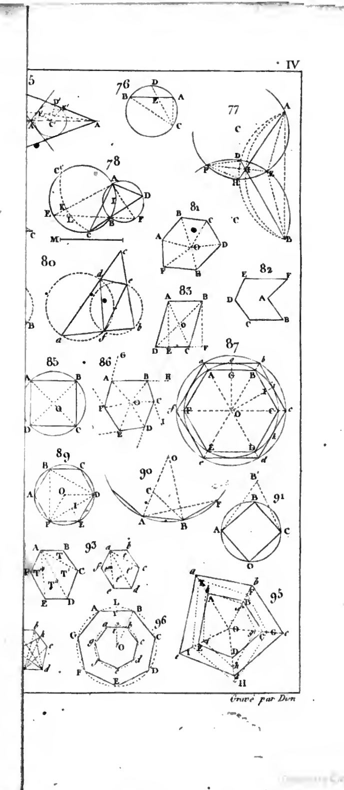
II
28
A
C'
B
C'
31
C
D
B
C
D'
B
C'
C
I
B
C
C'
40
B
47
E
51
C
A
D
17
19
K
I
22
C
D
K
D
rave par Dien


Page
26

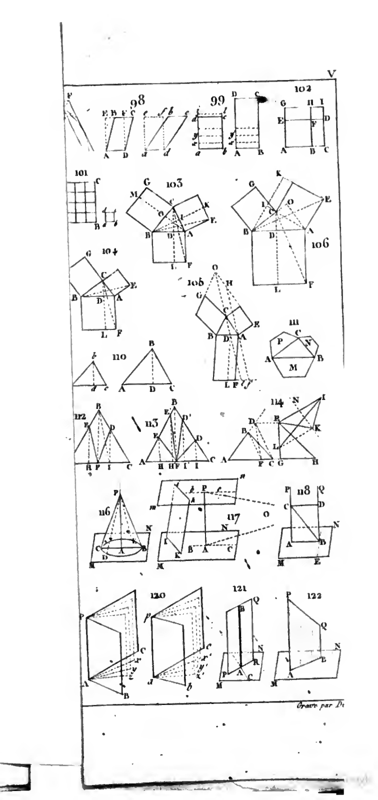


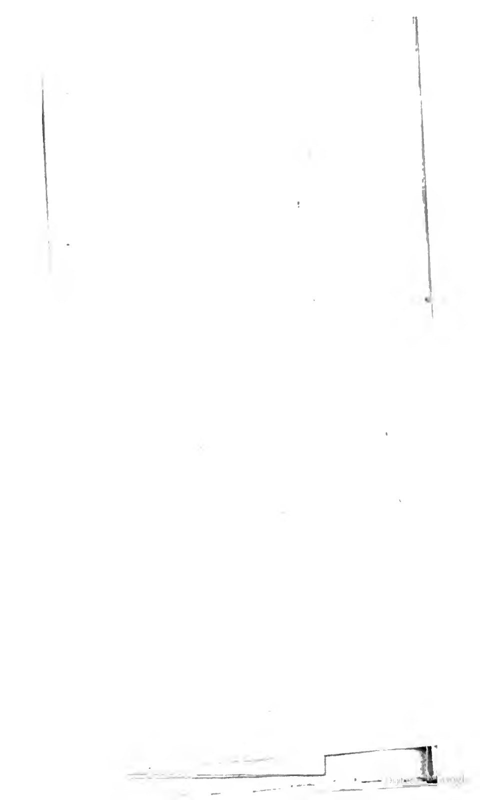
Gravé par Dien

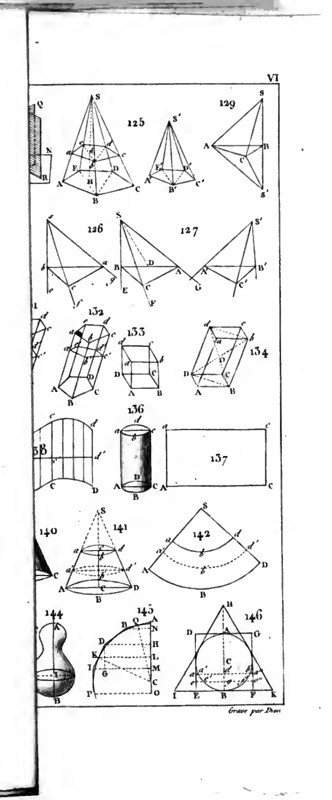

III
54
56
55
58
57
59
60
61
63
67
65
66
64
68
69
70
72
71
73
74
Gravé par Dien



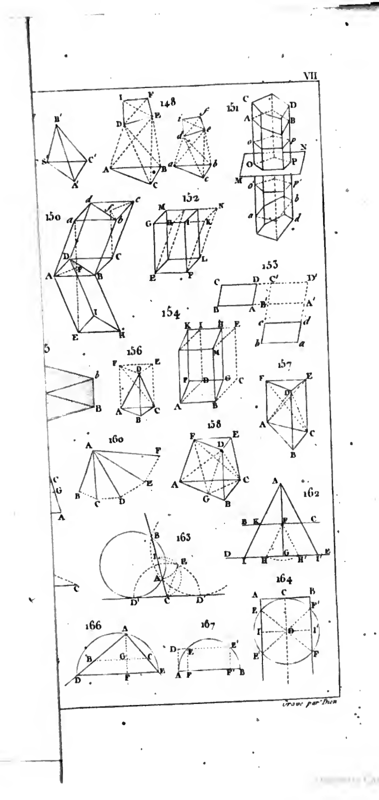
Gravé par Dien

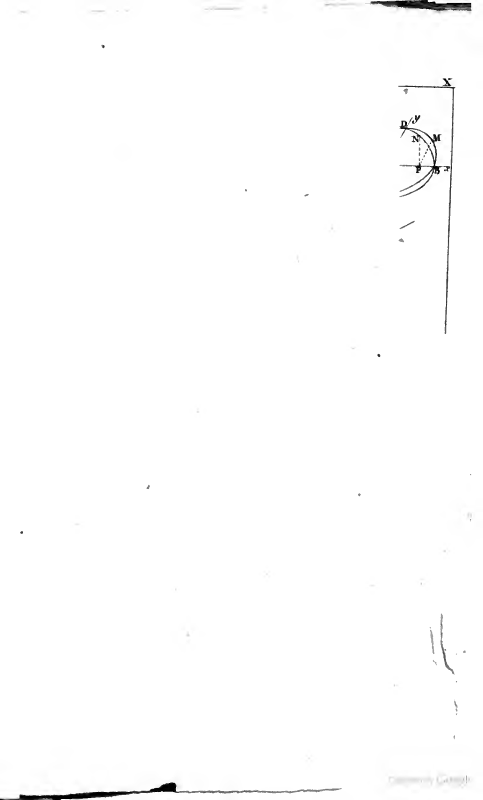

V
98
99
102
101
103
106
104
105
110
111
112
113
114
116
117
118
120
121
122
Gravé par D

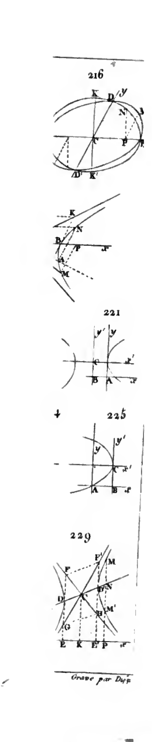


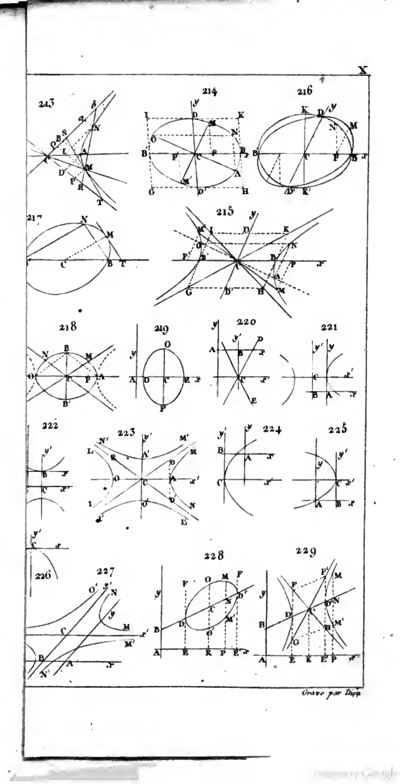

VI
Gravé par Dien

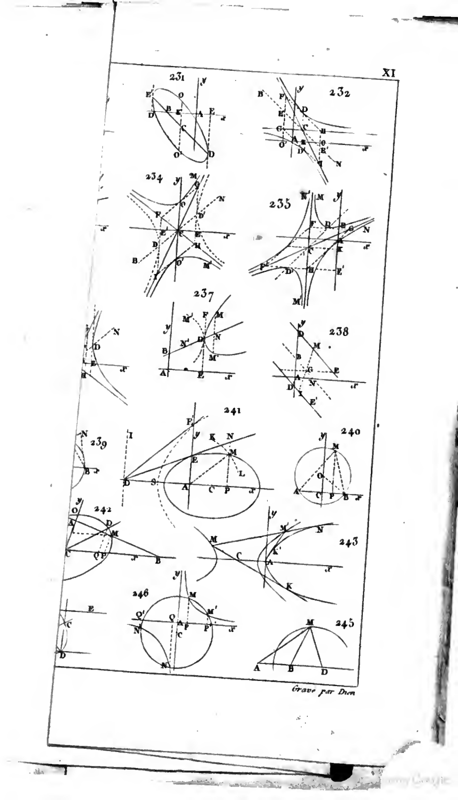



148
150
151
152
153
154
156
157
158
160
162
163
164
166
167
Gravé par Dien

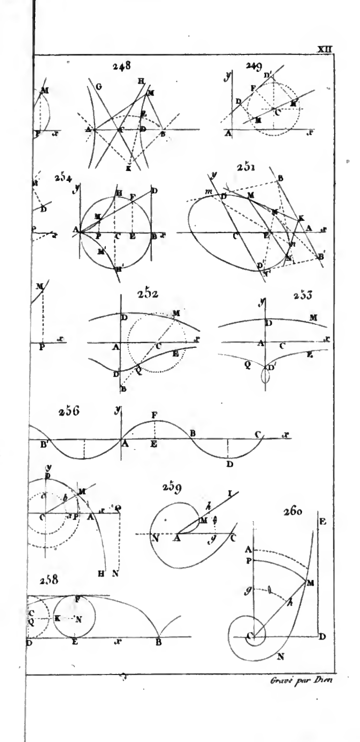

X
D
y
N
M
P
S
x

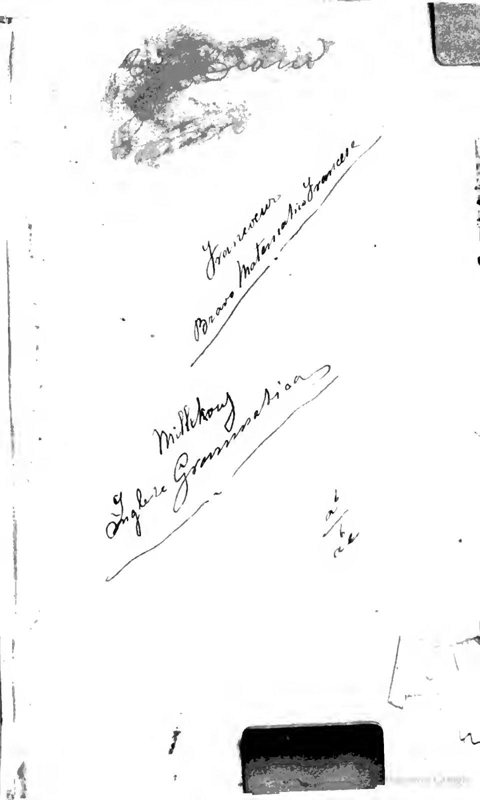

216
221
225
229
Grave par Dup.


X
213
214
216
217
215
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
Gravé par Dien


231
232
234
235
237
238
241
240
239
242
243
246
245
Gravé par Dien

XII




Inglese Grammatica

